ISSN 2529-9824

Artículo de Investigación

¿Cómo determinan la convergencia de una serie numérica los estudiantes? Un análisis de sus argumentos

How do students determine the convergence of a numerical series? An analysis of their arguments

Alejandro Miguel Rosas Mendoza[1]: Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, México.
alerosas@ipn.mx
Luis Fernando Ramírez Oviedo: Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica.
lramirez@uned.ac.cr
Juan Gabriel Molina Zavaleta: Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, México.
jmolinaz@ipn.mx

Fecha de Recepción: 27/05/2024

Fecha de Aceptación: 08/10/2024

Fecha de Publicación: 30/01/2025

Cómo citar el artículo

Rosas Mendoza, A. M., Ramírez Oviedo, L. F. y Molina Zavaleta, J. G. (2025). ¿Cómo determinan la convergencia de una serie numérica los estudiantes? Un análisis de sus argumentos [How do students determine the convergence of a numerical series? An analysis of their arguments]. *European Public & Social Innovation Review*, 10, 01-18. https://doi.org/10.31637/epsir-2025-1197

Resumen
Introducción: Este trabajo tuvo como finalidad analizar las características de los argumentos de estudiantes mientras resuelven tareas matemáticas sobre la convergencia o divergencia de series numéricas infinitas. Estudiar los argumentos de los estudiantes permite revisar su razonamiento y su comprensión de las series numéricas. **Metodología**: Para estudiar los argumentos de los estudiantes se utilizó el modelo argumentativo de Toulmin, el cual ha sido utilizado en el estudio de diferentes formas de argumentación y en múltiples contextos. La investigación es de corte cualitativo para lo cual se construyeron tablas de cotejo para analizar la estructura de los argumentos y caracterizarlos. **Resultados:** Se aplicaron dos

[1] **Autor Correspondiente:** Alejandro Miguel Rosas Mendoza. Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria (México).

actividades de 3 series numéricas infinitas para que los alumnos determinaran su convergencia o divergencia, se recopilaron datos escritos y audios con las respuestas y justificaciones. **Discusión**: Los argumentos incluyen diferentes elementos de los que el modelo de Toulmin establece. **Conclusiones**: Entre las conclusiones obtenidas, se encontró que los estudiantes basan su argumentación en los criterios de convergencia de las series, este constituye su punto de partida para desarrollar su proceso argumentativo sin considerar, en muchos casos, los datos presentes en la actividad o tarea matemática.

Palabras clave: argumentación; modelo argumentativo de Toulmin; serie numérica infinita; convergencia; divergencia; criterio de convergencia; tabla de cotejo; garantía y respaldo.

Abstract
Introduction: The purpose of this work was to analyze the characteristics of students' arguments while solving mathematical tasks about the convergence or divergence of infinite numerical series. Studying students' arguments allows us to review their reasoning and understanding of numerical series. **Methodology**: To study the students' arguments, Toulmin's argumentative model was used, which has been used in the study of different forms of argumentation and in multiple contexts. The research is qualitative in nature, for which comparison tables were built to analyze the structure of the arguments and characterize them. **Results:** Two activities of 3 infinite numerical series were applied for students to determine their convergence or divergence, written and audio data were collected with the answers and justifications. **Discussions:** The arguments include different elements than those established by Toulmin's model. **Conclusions**: Among the conclusions obtained, it was found that students base their argument on the criteria of convergence of the series, this constitutes their starting point to develop their argumentative process without considering, in many cases, the data present in the mathematical activity or task.

Keywords: argumentation; Toulmin's argumentative model; infinite numerical series; convergence; divergence; convergence criterion; comparison table; warrant and backing.

1. Introducción

La carrera universitaria de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia (UNED), en Costa Rica, formas docentes de matemática para la enseñanza general básica en tercer ciclo y ciclo diversificado (equivalente a educación secundaria y educación media superior) y algunos cursos universitarios iniciales como Precálculo, Elementos básicos de álgebra, Cálculo, entre otros. Una de las asignaturas más complejas de la carrera Enseñanza de la Matemática de la UNED es Análisis Real, debido a la abstracción de los conceptos matemáticos que se estudian y la formalidad con que se abordan, esta asignatura, por sus características en cuanto a contenidos, mediación, evaluación y roles del estudiante y docente durante su aprendizaje puede considerarse como un curso matemático avanzado según las diferentes categorizaciones que presenta Calvo (2001). Justificar, argumentar y demostrar proposiciones matemáticas sobre conceptos como sucesiones, series numéricas y series de potencias es trascendente en todos los procesos de mediación y evaluación de la asignatura.

Sin embargo, a partir de la observación de las producciones escritas de los estudiantes, así como sus reclamos sobre calificaciones obtenidas dejan entrever que existen debilidades en su forma de argumentar o justificar con base en los fundamentos teóricos aquellos procesos que garantizan la veracidad de una proposición. Los conceptos fundamentales del análisis matemático, como límite e infinito, afectan la didáctica de las series numéricas infinitas y afectan el proceso de su aprendizaje (Codes, 2010), ya que el estudiante está familiarizado con la suma como una operación binaria entre dos elementos y que en el caso de sumar "n" elementos lo hará dos a dos hasta obtener un resultado; sin embargo, en el caso de las series vistas como sumas infinitas ya no funciona dicho proceso de sumar términos dos a dos y esto representa un obstáculo en la apropiación de estos conceptos, ya que requiere definirlas como una sucesión de sumas parciales y analizar la convergencia (mediante el límite) de esta sucesión.

Entre los errores comunes que cometen los estudiantes al estudiar la convergencia de series numéricas se encuentra la falta de verificación de hipótesis para aplicar un criterio de convergencia. Otro error común es la aplicación errónea de un teorema, al tomar interpretaciones erróneas del mismo asegurando que el recíproco es válido o tomando una contrapositiva inexacta. Estos errores se encuentran estrechamente ligados con su habilidad para argumentar. Este es uno de los principales retos que se pretende abordar con este trabajo de investigación.

Identificar patrones, formas de razonamiento y tipos de argumentos podría apoyar a generar espacios, como por ejemplo talleres para fortalecer la argumentación en función del razonamiento de los estudiantes. Para Solar-Bezmalinovic (2018) una de las implicaciones de conocer los patrones de razonamiento es diseñar las lecciones previendo errores de los estudiantes y de ese modo reorientar la clase. Al mismo tiempo facilita comprender las ideas de los estudiantes y facilita reorganizarlas para construir en conjunto el concepto en estudio.
El estudio de la argumentación de los estudiantes universitarios en el desarrollo de tareas matemáticas sobre la convergencia o divergencia de series numéricas podría arrojar luz acerca de la forma en que razonan y en que desarrollan su discurso escolar en función de convencer a docentes u otros compañeros sobre la validez de sus afirmaciones.

Por otro lado, la argumentación en el estudio de la convergencia de las series numéricas podría permitir observar la comprensión que están alcanzando los estudiantes sobre este tema ya que como lo señala Weston (2021) la argumentación es una forma de indagación, y el docente podría servir para reestructurar su clase y mejorar la comprensión de los conceptos y reglas en estudio. Al mismo tiempo podría generar insumos para la toma de decisiones con respecto a conceptos relacionados como las series de funciones, series de potencias, ecuaciones diferenciales y en adelante para el estudio de series numéricas y de potencias de números complejos. Esta reestructuración de la mediación a partir de lo observado puede ayudar a mejorar la comprensión de los estudiantes de los temas en estudio y a su vez el rendimiento en la asignatura.

1.1. Antecedentes Sobre el Estudio de las Series Numéricas

Las series numéricas constituyen uno de los temas más comunes de estudio tanto en el Análisis Real como en el Cálculo, ya que éstas permiten introducir conceptos como Sumas de Riemann y funciones analíticas; incluso en los métodos numéricos favorecen el cálculo de expresiones numéricas difíciles de obtener mediante métodos analíticos.

Sin embargo, comprender conceptos como convergencia puede resultar complejo ya que se requiere una concepción diferente de la suma, la cual se introduce desde la infancia como una operación binaria y en el estudio de las series numéricas adquiere cierta ambigüedad, ya que se tiene una suma infinita de términos que no podría realizarse dos a dos.

Gutierrez (2013) se planteó el objetivo de establecer la pertinencia de enseñar el tema de series numéricas en nivel medio con alumnos que no conozcan el cálculo diferencial e integral. Rosas (2007) identificó factores que afectan la enseñanza y aprendizaje de las series infinitas en estudiantes de nivel superior. Valcarce y González-Martín (2017) se propusieron como objetivo analizar cómo los estudiantes de primer año universitario aprenden el concepto de sumas parciales en pro de comprender su noción de serie numérica. La comprensión del concepto de sumas parciales, que se encuentra estrechamente ligado con el de serie infinita, demanda de razonamientos por parte de los estudiantes que pueden ser analizados por la argumentación (Valcarce y González-Martín, 2017).

1.2. Argumentación Matemática y el Modelo de Toulmin

En los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, resulta fundamental argumentar adecuadamente la veracidad de las afirmaciones que se realizan sobre los objetos matemáticos, ya sea desde una perspectiva sumamente formal como las demostraciones hasta procesos simples en una tarea matemática escolar. Argumentar permite comunicar y convencer a los demás sobre la validez de nuestros razonamientos. Hernández (2013) analizó las argumentaciones escritas y verbales de los estudiantes en el contexto de una actividad matemática bajo el enfoque de resolución de problemas. Crespo (2007) tuvo como objetivo comprender las argumentaciones por reducción al absurdo para la validación de resultados matemáticos como un producto social mediante una serie de visiones de la argumentación y demostración matemática desde diferentes contextos. Tobías (2019) analizó el razonamiento inferencial estadístico de estudiantes universitarios con el modelo de argumentación de Toulmin (2003). Mendo (2015) propuso analizar los argumentos que proponen los estudiantes sobre una secuencia didáctica y hacer inferencias sobre su razonamiento.

Solar-Bezmalinovic (2018) mediante el modelo de Toulmin desarrolló un seminario con el fin de identificar condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas. Solar y Deulofeu (2016) se propusieron identificar condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas. “Hacer preguntas y desarrollar actividades que todos los alumnos consideren que merecen reflexión” (p. 1095). Nardi *et al*. (2012) exploraron el conocimiento y las creencias de los docentes y cómo estos se transforman en la práctica pedagógica, a través de las producciones escritas sobre una tarea matemática, analizaron la gama de influencias (epistemológicas, pedagógicas, curriculares, profesionales y personales) sobre los argumentos que esgrimen los profesores en sus guiones y entrevistas.

2. Marco Teórico

2.1. Argumentos y Argumentación

Las proposiciones matemáticas que se presentan durante el estudio o aprendizaje de la matemática a nivel superior requieren en su mayoría ser justificadas, argumentadas o demostradas, con tal grado de validez y coherencia para que pueda ser aceptado por la comunidad matemática en general, este grado de exactitud, convierte a la demostración matemática en una de las tareas más complejas en la comunidad científica.

En el aprendizaje de la matemática la demostración de proposiciones es una herramienta de mediación pedagógica y a su ver una estrategia de evaluación de los aprendizajes que es de mucho uso, sin embargo, algunas tareas de clase como determinar la convergencia o divergencia de una serie numérica, podría requerir de menos rigurosidad, pero siempre de razonamientos que respalden la afirmación dada y permitan convencer al docente o a los compañeros de clase.

Balacheff (2000) hace una distinción entre los términos explicación, prueba y demostración, donde "explicación" es el más simple de los tres, en ésta, el interlocutor garantiza la validez de sus razonamientos a través de sus conocimientos y su propia racionalidad, mientras que la "prueba" hace referencia a aquellas explicaciones que son aceptadas por la comunidad matemática o al menos una parte de ella y por último, la "demostración" en un sentido bastante riguroso consiste en pruebas con cierta estructura que parten de la lógica formal.

Aunque podríamos ligar el término argumentación con explicación, pues en algunos contextos son sinónimos, en realidad podemos asegurar que la argumentación puede relacionarse con cada uno de estos tres términos; explicación, prueba o demostración, lo que permitirá clasificarlo como uno u otro será el nivel de solidez, coherencia y estructura de los argumentos, así como el proceso en general. Para Toulmin *et al*. (1984) la argumentación consiste en toda la actividad de hacer aserciones, desafiarlas, apoyarlas con razones, criticar esas razones, rebatir esas críticas, y así sucesivamente.

Para Solar y Deulofeu (2016) un elemento importante en los procesos argumentativos es la existencia de dos puntos de vista diferentes o encontrados, en donde el locutor deba convencer al receptor sobre la validez de sus aserciones, sin embargo, desde una perspectiva matemática

> definimos la argumentación matemática como aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sea de naturaleza deductiva y no sólo semántica. (De Gamboa *et al*., 2010, p. 37).

Para Duval (1992) una explicación da una o más razones para hacer comprensible un hecho, pero estas razones en realidad tienen una función cuasidescriptiva, es decir, contribuyen a presentar el sistema de relaciones dentro del cual ocurren o encuentran su lugar los datos a explicar mientras que la argumentación es un encadenamiento de razonamientos, un discurso que apunta a la plausibilidad y el convencimiento de los demás y la demostración es un proceso que parte de la lógica formal y busca la verdad.

Según Weston (2021) la argumentación puede ser vista tanto desde la semántica como desde la lógica deductiva, señala que la argumentación a través de argumentos cortos debe cumplir con una serie de reglas para garantizar su calidad como, Distinguir entre premisa y conclusión, Presentar las ideas en forma natural, Partir de premisas fiables, Concreto y conciso, Evitar el lenguaje emotivo, Usar términos consistentes, Usar un único significado para cada término.

El estudio de la argumentación puede clasificarse de varias formas como lo menciona Ríos-Cuesta (2021), pero en sí, se pueden apreciar dos grandes corrientes, una enfocada en la semántica y la retórica (lógica informal) y la otra basada en la lógica formal que no pretende convencer sino partir de deducciones sobre un esquema de verdades acepadas y que genera conclusiones verdaderas.

Para el estudio de la argumentación enfocada en la estructura de los argumentos, en la semántica, se vuelve fundamental tomar en cuenta elementos del lenguaje como lo señalan Jiménez y Pineda (2013), ya que el estudiante en su discurso argumentativo es probable que utilice una combinación entre lenguaje formal y lenguaje natural (coloquial), Roshaní (2019) menciona que el lenguaje que utiliza un matemático en su quehacer no es el mismo que utiliza en la docencia y a su vez los estudiantes desarrollan un lenguaje lógico-formal de forma progresiva hasta alcanzar el nivel de abstracción que conlleva el lenguaje formal, además señala que la existencia de un lenguaje intermediario que permite la interacción entre el lenguaje formal y el natural en diferentes grados.

2.2. *Modelo Argumentativo de Toulmin*

Uno de los modelos más conocidos y utilizados para el análisis de los argumentos en diferentes contextos es el propuesto por Stephen Toulmin en 1958, quien presentó un modelo lógico para describir los argumentos según su estructura, en diferentes campos, y que surge como una alternativa ante la relevancia en esa época de la argumentación basada en la lógica deductiva con una perspectiva desde la matemática. Este modelo se conoció como lógica informal o antilógica, sin embargo, diferentes autores lo han utilizado para analizar la argumentación desde la semántica y la retórica al mismo tiempo que otros lo utilizan para analizar argumentos basados en el razonamiento deductivo formal como lo señala Ríos-Cuesta (2021).

Toulmin (2003) describe la argumentación en términos de seis elementos: 1. datos o evidencia (D-data), 2. Afirmación o aserción (C-claim), 3. Garantía (W-warrant), 4. Respaldo (B-backing), 5. Calificadores Modales (Q-modal qualifiers) y 6. Refutadores (R-rebuttals), cada uno cumple una función estructural en el análisis del discurso argumentativo.

Algunos investigadores han generado adaptaciones de este modelo para el análisis de argumentos en contextos más concretos como el caso de Krummheuer (1995), citado por Ríos-Cuesta (2021), que reduce el modelo de Toulmin a solamente cuatro elementos: 1. datos (D), 2. Aserción (C), 3. Garantía (W), 4. Respaldo (B) para analizar argumentos en la clase de matemática, mientras que Molina *et al*. (2019) reducen aún más el modelo de Toulmin a los primeros 3 elementos, dejando de lado el respaldo (si se compara con la versión de Krummheuer) y que se utilizó para analizar argumentos por analogía en la clase de matemáticas.

El modelo de Toulmin reducido por Krummheuer, fue el primero en utilizarse para modelar argumentos en la clase de matemática como lo indican Inglis y Mejía-Ramos (2005), y esta versión reducida se extendió y consolidó en el estudio de la argumentación, para Ríos-Cuesta (2021) cada vez son más los investigadores que utilizan el modelo de Toulmin reducido a 3 componentes (modelo ternario): 1. Datos, 2. Aserción y 3. Garantía. Sin embargo, Inglis *et al*. (2007) señalan que argumentado que una versión reducida es inadecuada para modelar con precisión toda la gama de argumentos construidos por los estudiantes de matemáticas.

Con respecto al modelo de Toulmin y sus diferentes adaptaciones o reducciones, en esta investigación se consideran los seis elementos que componen el modelo original, sin embargo, se considera como válido un argumento desde el modelo de Krummheuer, ya que como señalan Toulmin *et al*. (1984) son al menos cuatro los elementos que pueden ser encontrados en cualquier argumento completamente explicitado: 1) aserciones (C); 2) datos (D); 3) garantías y reglas (W), y 4) respaldos (B) y el respaldo, así como desde el modelo ternario ya que el respaldo podría estar implícito en la garantía.

2.3. *Construcción de las Listas de Cotejo*

Como parte del análisis de la argumentación se utilizaron listas de cotejo o listas de verificación para registrar la presencia o ausencia de los elementos que componen un argumento según el modelo de Toulmin. Estas listas permiten observar los elementos presentes en cada una de las producciones de los estudiantes tanto escritas como verbales "las listas de control, hojas de cotejo, nos pueden permitir determinar si ciertas características están o no presentes en un sujeto, en una situación, fenómeno o material que forma parte del contexto" (Barrantes, 2014, p. 205).

González *et al*. (2020) definen las listas de cotejo como "un instrumento que relaciona acciones sobre tareas específicas, organizadas de manera sistemática para valorar la presencia o ausencia de estas y asegurar su cumplimiento durante el proceso de aprendizaje" (p. 218) y a su vez señalan que es un instrumento flexible y aplicable en una variedad de contextos.

3. Metodología

En el estudio de la argumentación por parte de los estudiantes ante una tarea matemática, se está explorando intrínsicamente el razonamiento o las cadenas de razonamiento que emplean los estudiantes para construir su discurso argumentativo, esta es una de la razones para considerar el método de experimento de enseñanza como parte de la metodología de esta investigación, ya que como bien lo destacan Steffe y Thompson (2000) un propósito principal para usar la metodología de experimentos de enseñanza es experimentar, de primera mano como investigador, el aprendizaje y el razonamiento matemático de los estudiantes.

La forma de los datos que se recolectaron y analizaron, son en su mayoría producción escrita e intervenciones orales, discusiones entre estudiantes y docente que se analizan para comprender las formas de razonamiento y argumentación presentes en la resolución de tareas matemáticas.

Para Stylianides y Stylianides (2013), las metodologías de investigación conocidas como intervenciones de clase, como lo es el caso del experimento de enseñanza, responden muy satisfactoriamente a tres aspectos fundamentales de la investigación en educación matemática: La pertinencia de los resultados, Abordaje de cuestiones clave en los contextos de aula, y Busca desarrollar pruebas empíricas y soluciones basadas en la teoría.

Los sujetos participantes en la investigación son los estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, de la asignatura Análisis Real. Los estudiantes inscritos en la asignatura e invitados a participar en la investigación y que, por razones de disponibilidad horaria participaron, fueron 6 estudiantes en un taller de trabajo colaborativo: Ana, Laura, Luis, David, Karla y Jordi.

Para la etapa de recolección de los datos, se utilizó la grabación de audio y video que permitió registrar las intervenciones de cada uno de los estudiantes durante un taller de resolución de tareas matemáticas. Además, se registró la producción escrita de los estudiantes en forma individual en la resolución de las tareas matemáticas como parte de la evaluación del curso. La forma de recolectar esta información fue a través de grabación de audio y video de la sesión de Zoom, los apuntes de los estudiantes durante las actividades realizadas de forma sincrónica, así como en instrumentos de evaluación que presentan de forma escrita.

La lista de cotejo sobre la estructura de los argumentos es de elaboración propia, cada fila pretende registrar la presencia o ausencia de cada uno de los elementos del modelo de Toulmin. Además, se agrega una columna de observaciones para registrar aspectos que aclaren porqué se considera que un dato está presente o ausente, de acuerdo con las indicaciones brindadas por González *et al*., (2020) para su elaboración. Cada una de las filas registra características de cada elemento del modelo argumentativo de Toulmin.

4. Resultados

El primer paso para el análisis de los argumentos fue la transcripción de fragmentos de las grabaciones de video para poder organizar las intervenciones realizadas por los estudiantes y así observar las estructuras presentes en sus argumentos verbales que deberían complementar los registros de sus hojas de trabajo. Se reescribieron los argumentos de los estudiantes realizando diagramas con la información.

4.1. Argumentos Escritos en la Actividad 1

Una de las tareas matemáticas presentadas a los estudiantes como parte de una evaluación consistía en determinar si tres series numéricas infinitas dadas convergían o divergían.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$$

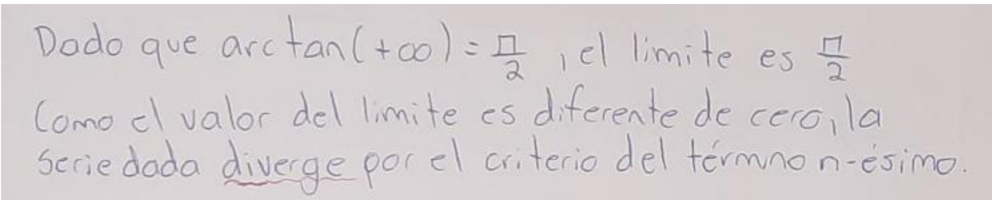
(A) (B) (C)

Algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes contienen errores y abusos de notación, sin embargo, con el afán de observar la estructura y características presentes en sus argumentos, estos errores o imprecisiones no están siendo considerados como parte del análisis.

La primera de las series (A) es divergente, al considerar el límite del n-ésimo término de la serie se obtiene π/2. Un corolario del criterio de Cauchy para convergencia de series establece que si una serie $\sum a_n$es convergente, entonces $a_n \to 0$ cuando n→∞. Luego, al aplicar la contrapositiva de este corolario se concluye la divergencia.
En las soluciones presentadas por los estudiantes, solamente uno de ellos (Ana) presentó un argumento con los 4 elementos del modelo reducido de Toulmin.

Figura 1

Argumento de Ana



Conclusión: La serie dada diverge.

Datos: $\lim_{n\to\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$

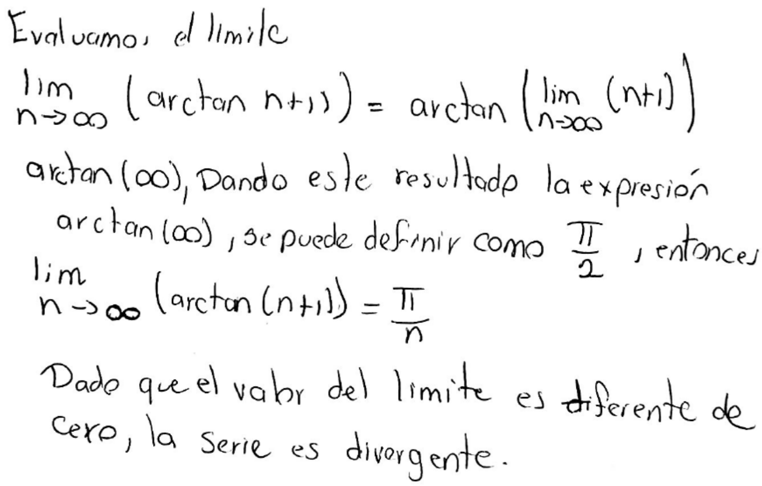
Garantía: El valor del límite del n-ésimo término es diferente de cero

Respaldo: El criterio del n-ésimo término (se refiere al corolario del criterio de Cauchy)

De forma similar Karla, presenta un razonamiento muy parecido al empleado por Ana, sin embargo, no hace explícito el respaldo.

Figura 2

Argumento de Karla


Evaluamos el limite

$$\lim_{n\to\infty}(\arctan n+1) = \arctan\left(\lim_{n\to\infty}(n+1)\right)$$

arctan(∞), Dando este resultado la expresión arctan(∞), se puede definir como $\frac{\pi}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(\arctan(n+1)) = \frac{\pi}{n}$$

Dado que el valor del limite es diferente de cero, la serie es divergente.

Conclusión: La serie dada diverge

Datos: $\lim_{n\to\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$

Garantía: El valor del límite del n-ésimo término es diferente de cero.

En el caso de Jordi, no hace explícita la garantía ni el respaldo, sin embargo, implícitamente hace uso de ellas.

Conclusión: La serie dada diverge

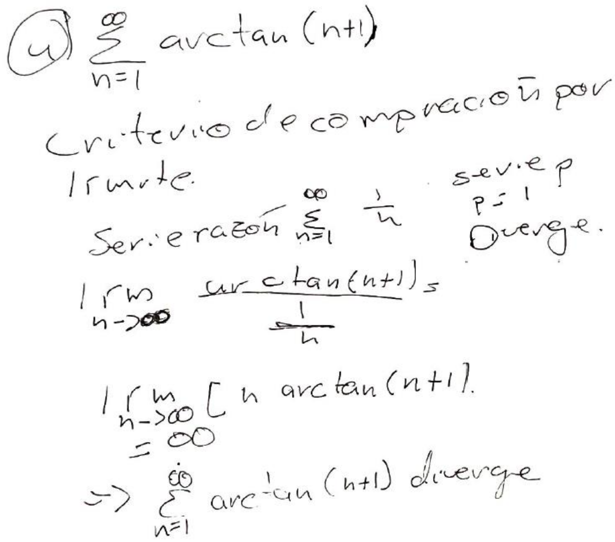
Datos: $\lim_{n\to\infty} n \cdot \arctan(n+1) = \infty$

Garantía: El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ donde $\sum a_n$ es una serie divergente (no es explícita, pero se puede inferir)

Respaldo: criterio de comparación mediante el límite (no es explícito, pero se puede inferir)

Figura 3

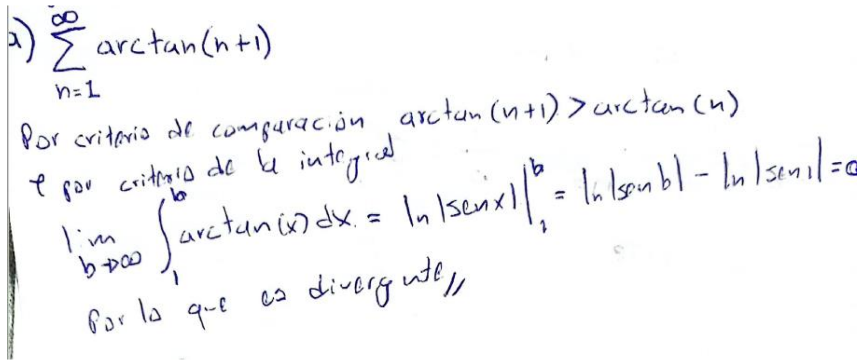
Argumento de Jordi



A diferencia de los argumentos anteriores, el caso de David no logra presentar un argumento claro. Aunque su conclusión es verdadera, los datos que presenta no poseen ninguna garantía que permita conectar los datos con la conclusión, inclusive algunos datos que presenta son erróneos. Intenta aplicar el criterio de la integral, sin embargo, no se cumplen las hipótesis para emplear este criterio.

Figura 4

Argumento de David. Actividad 1 A



Conclusión: La serie es divergente

Datos: 1. $\arctan(n+1) > \arctan(n)$ 2. $\int_1^{\infty} \arctan x \, dx = \ln|\sin x|$ (Incorrecto)

Garantía: No presenta.

En la tabla 1 se muestra un resumen de los elementos presentes en los argumentos de los estudiantes. En todos los casos, los estudiantes tratan de realizar una argumentación deductiva, basada en los criterios de convergencia establecidos en el texto de la asignatura, lo cual conlleva a un modelo reducido de Toulmin con 4 elementos: Conclusión, Datos, garantía y Respaldo. En la mayoría de los casos se evidencia una falta de respaldo que brinde soporte a la garantía, y en otros la garantía no es vinculante con la conclusión o no está explícita.

Tabla 1

Elementos presentes en los argumentos

Estudiante	C	D	W	B	Q	R
Ana	✓	✓	✓	✓		
Karla	✓	✓	✓			
Jordi	✓	✓				
David	✓					
Laura	✓	✓				
Luis						

Nota: Datos (D), Conclusión (C), Garantía (W), Respaldo (B), Calificadores Modales (Q), Refutadores (R).

Fuente: Elaboración propia (2024).

Las conclusiones obtenidas por los estudiantes en la tarea 1, en 3 de los 6 casos fueron explícitas, claras, únicas, coherentes y basadas en los datos. El caso de Laura difiere ya que obtuvo una conclusión que no es coherente con la serie numérica dada ni con los datos mostrados. Por su lado David obtuvo una conclusión coherente con la serie dada pero no logró vincularla con sus datos ni estableció conexiones. Por último, Luis no presentó argumentos.

Tabla 2

Características de las conclusiones presentes en los argumentos

Estudiante	Explícita	Única	Coherente	Clara	Basada en los datos
Ana	✓	✓	✓	✓	✓
Karla	✓	✓	✓	✓	✓
Jordi	✓	✓	✓	✓	✓
David	✓	✓	✓	✓	
Laura	✓	✓		✓	
Luis					

Fuente: Elaboración propia (2024).

Los datos que emplean los estudiantes para organizar su argumentación fueron en tres de los casos explícitos, coherentes y suficientes. En los demás casos no fueron explícitos o no tenían coherencia con la serie dada, por ende, insuficientes para establecer la conclusión.

Tabla 3

Características de los Datos presentes en los argumentos

Estudiante	Explícitos	Coherentes	Suficientes
Ana	✓	✓	✓
Karla	✓	✓	✓
Jordi	✓	✓	✓
David			
Laura	✓		
Luis			

Fuente: Elaboración propia (2024).

Las garantías que son fundamentales en los procesos argumentativos pues permiten conectar los datos con la conclusión, solamente en dos casos (Ana y Karla) se expresaron de forma explícita. Los demás estudiantes no brindan garantías ni respaldo. Además, solamente Ana expresó un respaldo de forma explícita, mientras que en la argumentación de Karla se puede inferir que respalda su garantía con un criterio de convergencia del texto.

Tabla 4

Características de las Garantías presentes en los argumentos

Estudiante	Explícitos	Coherentes	Suficientes	Acorde a los datos y a la conclusión
Ana	✓	✓	✓	✓
Karla	✓	✓	✓	✓
Otros				

Fuente: Elaboración propia (2024).

La estructura observada en los argumentos presentados por los estudiantes en la solución de la tarea de evaluación destaca una argumentación deductiva, basada en los criterios de convergencia o divergencia de series, sin embargo, al menos en la mitad de los casos no lograron explicitar los elementos principales (Conclusión, Datos, Garantía y Respaldo) para establecer un argumento pertinente. De manera semejante se analizaron las respuestas de las series B y C.

4.2. Argumentos verbales en la Actividad 2

En una segunda actividad desarrollada con los estudiantes, se trabajó en un taller virtual y sincrónico de resolución de problemas, enfocados en determinar la convergencia o divergencia de 3 series numéricas. En la sesión de este taller participaron 5 estudiantes: Ana, Karla, David, Laura y Luis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}$$

(A) (B) (C)

Aunque inicialmente el taller estaba propuesto para trabajo individual, fue necesario cambiar la modalidad a trabajo en grupos para favorecer la discusión y los aportes de los estudiantes pues se sentían en más confianza. Se les facilitó a los estudiantes cada una de las series a estudiar y un documento de Excel con hojas electrónicas en las cuales podían observar los valores de las sumas parciales de las series, así como una gráfica de puntos de la sucesión de sumas parciales.

Durante el trabajo en grupo, los estudiantes Ana, Luis y Laura observaron los datos del Excel y rápidamente concluyeron que la serie es divergente (verdadero) ya que la sucesión de sumas parciales "crecía de forma muy rápida". Sin embargo, consideraron que estos datos no eran suficientes para garantizar la convergencia, entonces acudieron a un criterio de convergencia, en este caso el criterio de la razón y obtuvieron un valor mayor a uno, lo que les permitió garantizar que la serie era divergente. El siguiente es un extracto de la argumentación presentada por Luis en la solución de la tarea 2A en el cual Luis participó como vocero del grupo.

01:25:13 Prof.: Entonces la pregunta para el grupo. ¿Esta serie converge o diverge?
01:25:23 Luis: Diverge.
01:25:26 Prof.: ¿Cómo llegó a esa conclusión, en qué se basó?
01:25:29 Luis: Bueno, primero este el grupito, lo que hicimos fue que analizamos en la tabla de Excel, verdad y esté conforme van avanzando los valores de n, S_n va tendiendo a infinito y este utilizamos el criterio de la razón para probar que la que la serie diverge y llegamos al resultado de que el límite cuando n tiende a infinito de esa serie es "e", entonces "e" es mayor que uno y por definición de la serie este perdón por la de la definición de criterio de la razón si el valor del límite es mayor que uno, entonces esa serie diverge.
01:26:12 Luis: Por eso fue que llegamos a esa conclusión.
01:26:35 Prof.: ¿Será suficiente los datos del Excel para comprobar que diverge?
01:26:44 Luis: No, yo pienso que no es suficiente, puesto que es lo que es como una noción intuitiva de hacia dónde tiende la serie, pero no nos da la certeza de que eso se va a cumplir con todas las iteraciones que tenga la serie.
01:26:57 Prof.: Entonces, ¿qué fue lo que sí les dio certeza? ¿Cuál es la garantía de que diverge?
01:27:05 Luis: En el aplicar el criterio de la razón a la serie que se nos está dando.
01:27:10 Prof.: ¿Cuánto les dio el límite?
01:27:13 Luis: Y nosotros nos dio "e".
01:27:15 Prof. Ok ¿el criterio de la razón establece que?
01:27:19 Luis: Que es el valor del límite en menor que uno, entonces la serie converge, pero si es mayor que uno, entonces esa serie diverge y "e" es aproximadamente 2,71 y es mayor que uno, por lo tanto, la serie diverge.

Al aplicar el criterio de la razón, implícitamente están considerándolo como un respaldo de la garantía que fue el resultado obtenido en el límite (e>1), sin embargo, al consultárseles sobre la validez de la garantía no lograron explicar que el criterio se trata de una proposición probada formalmente en el curso y que permite respaldar a la garantía. Por otro lado, cuando observan el Excel y establecen una primera conclusión basada en las iteraciones de las sumas parciales, asumen una garantía en el crecimiento no acotado y continuo de la sucesión, sin embargo, al no tener un respaldo señalan que los datos en el Excel no son suficientes para garantizar y respaldar su conclusión. De manera semejante se analizaron las otras series.

4. Discusión

El empleo de diferentes tipos de series numéricas en la actividad evaluativa escrita (actividad 1) permitió observar que los estudiantes inicialmente seleccionan un criterio de convergencia que consideran el que más se ajusta a la estructura del término general de la serie dada. Posteriormente desarrollan procesos matemáticos asociados al criterio de convergencia como el cálculo de límites para a partir de este tipo de datos establecer si la serie dada converge o diverge. Esta forma de abordar el estudio de la convergencia, directamente de un criterio seleccionado generó en varias ocasiones conclusiones incoherentes derivadas de errores de cálculo. En otras ocasiones los errores de cálculo no afectaron la conclusión, sin embargo, resta confiabilidad al argumento.

La forma en que los estudiantes redactan sus argumentos permitió observar falta de claridad en la estructura general del proceso argumentativo, no se espera una redacción con un alto grado de formalidad, pero se destaca una falencia en la forma en que expresan su razonamiento de forma escrita. Por ejemplo, mencionan al inicio del escrito, casi como una pequeña nota que van a utilizar algún criterio de convergencia, pero no lo expresan explícitamente en la redacción de su argumento. Permite observar implícitamente que su razonamiento se basa en cierto criterio de convergencia, pero no lo externan. El criterio más utilizado por los estudiantes fue el criterio de la razón, tanto en los ejercicios de la evaluación escrita como en los ejercicios del taller, utilizaron o sugirieron utilizar dicho criterio, aunque en algunos casos contaban con una serie alternante.

El estudio de la serie alternante en la actividad 1, la mayoría utilizó el criterio de convergencia para series alternantes, sin embargo, varios asumieron sin garantía ni respaldo las condiciones que debía satisfacer la serie para poder garantizar la convergencia, en cierto modo, cuando debieron garantizar propiedades como la monotonía que no necesariamente depende del cálculo de un límite tendieron a asumirla como verdadera.

La mayoría de los argumentos analizados presentaban la conclusión, los datos en que basaban su conclusión y alguna garantía. Sin embargo, en pocos casos presentaban un respaldo para su garantía. En algunos casos estaba implícito que el respaldo se encontraba en el criterio de convergencia que estaban empleando, aunque no lo declaraban en su argumento adecuadamente. Los argumentos presentados por los estudiantes se pueden estructurar mucho más a partir del modelo de Toulmin reducido a 4 elementos: Conclusión, Datos, Garantía y Respaldo. Con respecto al lenguaje matemático utilizado en los argumentos, se apreció un lenguaje adecuado, en el cual emplean términos matemáticos formales de manera correcta para referirse a convergencia, divergencia, límite, sucesión, entre otros. Sin embargo, existen abusos de notación y errores en la redacción del mismo lenguaje matemático. Solamente en el caso de Laura se detectó el uso de términos coloquiales para expresar algunos aspectos de convergencia, menciona que los decimales de las sumas parciales "empiezan a quedarse pegados" o que las sumas parciales "siguen creciendo, siguen creciendo y no da la sensación de que vayan a frenar".

5. Conclusiones

Al utilizar el modelo de Toulmin para analizar los argumentos brindados por los estudiantes, se observó que los argumentos presentan la estructura: datos, conclusión, garantía y en algunos casos respaldo. Solamente en un argumento se presentaron refutadores y calificadores modales. Aunque muchos de los argumentos presentaban garantía y respaldos, no eran suficientes para garantizar la conclusión o en varios casos presentan errores de cálculo que conducen a conclusiones erróneas o conclusiones a partir de datos falsos. El lenguaje empleado por los estudiantes en su argumentación presenta un nivel formal en la mayoría de las respuestas. En pocos casos se detectó que los estudiantes utilizaron palabras o frases cotidianas para referirse a convergencia. Sin embargo, en la redacción de los estudiantes se observan abusos de notación al expresar cálculos, lo que muestra que, si bien conocen los términos correctos, a la hora de redactar presentan algunas dificultades para brindar coherencia a las expresiones matemáticas dentro de su discurso argumentativo.

En los casos que no cuentan con datos numéricos, seleccionan el criterio de convergencia que consideran más conveniente para determinar si la serie dada converge o diverge. No consideran las características de la serie, seleccionan un criterio y realizan cálculos para garantizar la convergencia. En el caso de una serie alternante emplearon directamente el criterio de la serie alternante y aunque no lograron garantizar que la serie satisfacía con las propiedades que requería el criterio para su correcta aplicación, asumieron que se debía cumplir y concluyeron sin mostrar las garantías adecuadamente. En los argumentos presentados por los estudiantes se observó que a través de exploraciones numéricas determinan rápidamente que una serie dada converge o diverge, sin embargo, requirieron de un proceso lógico-deductivo a través de criterios de convergencia para poder garantizar la convergencia. Ellos no consideraban suficiente con lo observado en la exploración numérica que podría considerarse un razonamiento inductivo.

Los argumentos que presentan los estudiantes para justificar la convergencia o divergencia de una serie numérica infinita siguiendo el modelo de Toulmin presentan de 3 a 4 elementos: datos, conclusión, garantía o respaldo. Siguen un razonamiento lógico-deductivo basado principalmente en los criterios de convergencia de series y utilizan un lenguaje formal acorde al nivel de la carrera en que se encuentran. En algunos argumentos se observó que elementos como la garantía o el respaldo se encuentran implícitos en sus procedimientos.

6. Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente.

Barrantes, R. (2014). *Investigación: un camino al conocimiento, un enfoque cualitativo, cuantitativo y mixto*. EUNED

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona]. Repositorio https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/16713

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional* [Tesis de doctorado, Universidad de Salamanca]. Repositorio https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/180653

Crespo, C. R. (2007). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo* [Tesis de maestría, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/mnPA

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, 31, 37-61. https://bitly.cx/gqb4q

González, V., Sosa, K. y Sierra, R. (2020). Lista de cotejo. *Evaluación del y para el aprendizaje: instrumentos y estrategias*, *18*(3), 89-107. https://bitly.cx/w0iz

Gutierrez, N. (2013). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior* [Tesis de maestría, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/A6T3w

Hernández, J. (2013). *Análisis del discurso de argumentación de estudiantes en la solución de una actividad matemática* [Tesis de doctorado, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/6HBS

Inglis, M., y Mejía-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista Ema*, *10*(2-3), 328-353. https://bitly.cx/Wg53H

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Jiménez, A. y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, 16, 101-116. https://doi.org/10.19053/01207105.3243

Mendo, L. (2015). *Argumentos matemáticos de estudiantes universitarios sobre la integral impropia* [Tesis de maestría, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/pRmu

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Nardi, E., Biza, I. y Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9345-y

Ríos-Cuesta, W. (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Revista Amazonia Investiga*, *10*(41), 96-105. https://doi.org/10.34069/AI/2021.41.05.6

Rosas, A. (2007). *Transposición Didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del Discurso Escolar actual en el nivel superior* [Tesis de doctorado, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/0Kfa

Roshaní, C. (2019). *Análisis de prácticas lingüísticas asociadas a la actividad matemática en la formación de futuros profesores* [Tesis de maestría, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/a1Kv5

Solar-Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 155-176. https://bitly.cx/97aaM

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 1092-1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly, y A. Richard (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. https://doi.org/10.4324/9781410602725

Stylianides, A., y Stylianides, G. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM. Mathematics Education*, *45*(3), 333-341. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0501-y

Tobías, M. (2019). *Uso del modelo de argumentación de Toulmin para analizar el razonamiento inferencial estadístico de estudiantes universitarios* [Tesis de maestría, CICATA-IPN]. Repositorio https://bitly.cx/Ky4iS

Toulmin, S., Rieke, R. D. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2da. Ed.). Macmillan Publishing Company.

Toulmin, S. (2003). The Uses of Arguments (Actualización de 1 ed.). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Valcarce, M. C. y González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *35*(1), 89-110. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Weston, A. (2021). *Las claves de la argumentación*. (5ta. Ed.) Editorial Ariel.

CONTRIBUCIONES DE AUTORES/AS, FINANCIACIÓN Y AGRADECIMIENTOS

Conceptualización: Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Molina Zavaleta, Juan Gabriel; **Software:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando **Validación:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel **Análisis formal:** Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Molina Zavaleta, Juan Gabriel; **Curación de datos:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel**;** **Redacción-Preparación del borrador original:** Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Ramírez Oviedo, Luis Fernando **Redacción-Re- visión y Edición:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Molina Zavaleta, Juan Gabriel **Visualización:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel **Supervisión:** Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Molina Zavaleta, Juan Gabriel **Administración de proyectos:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel **Todos los/as autores/as han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito:** Ramírez Oviedo, Luis Fernando, Rosas Mendoza, Alejandro Miguel, Molina Zavaleta, Juan Gabriel.

Financiación: Esta investigación no recibió financiamiento externo.

Agradecimientos: No.

Conflicto de intereses: No.

AUTORES:

Alejandro Miguel Rosas Mendoza.
Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, México.

Profesor investigador del CICATA-Legaria del IPN desde el año 2004. Licenciado en Matemáticas por la Universidad Veracruzana. Maestro en Ciencias por el CINVESTAV-IPN. Doctor en Matemática Educativa por el CICATA-Legaria del IPN. Experiencia docente desde 1990 como profesor de matemáticas en instituciones como Instituto Politécnico Nacional, Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Universidad Autónoma Metropolitana, Universidad Veracruzana, Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz. Ha dirigido proyectos de investigación para Instituto Politécnico Nacional, ITESM, CFE, CONAHCYT, Iusacell.
alerosas@ipn.mx

Índice H: 2
Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-3952-5448
Scopus ID: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56397817700
ResearchGate: https://www.researchgate.net/profile/Alejandro-Rosas-Mendoza
Academia.edu: https://ipn.academia.edu/AlejandroMiguelRosasMendoza

Luis Fernando Ramírez Oviedo
Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica.

Académico e investigador de la Universidad Estatal a Distancia, con más de 12 años de experiencia en docencia universitaria. Actualmente coordinador de cátedra para la carrera Enseñanza de la Matemática. Miembro de la Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas. Con estudios en Enseñanza de la Matemática por la Universidad de Costa Rica, Maestría en Educación y Nuevas Tecnologías por la UDIMA, España. Maestría en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México. Ha presentado ponencias y talleres en eventos nacionales e internacionales. Autor de textos universitarios, artículos en revistas académicas, artículos en memorias de congresos internacionales y autor de capítulos de libros internacionales.

lramirez@uned.ac.cr

Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-5557-7136
Google Scholar: https://scholar.google.com/citations?hl=es&user=impk9gEAAAAJ
ResearchGate: https://www.researchgate.net/profile/Luis-Ramirez-Oviedo
Academia.edu: https://acortar.link/y36lIj

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, México.

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por parte del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV-IPN). Ha sido profesor-investigador en el Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa perteneciente al CICATA-IPN desde el 2004 a la fecha. Es autor de artículos y capítulos de libros publicadas en diversas revistas y editoriales.

jmolinaz@ipn.mx

Índice H: 3
Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-6547-7131
Scopus ID: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=54895815300
Google Scholar: https://scholar.google.com/citations?user=D4l055UAAAAJ&hl=en