

Artículo de Investigación

Aplicación del Modelo Media Varianza con *Machine Learning* para Optimización de Portafolios de Inversión

Application of the Mean Variance Model with Machine Learning for Investment Portfolios Optimization

Claudia María García Mazo: Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Colombia.
cgarcia@elpoli.edu.co

Fecha de Recepción: 20/01/2025

Fecha de Aceptación: 21/02/2025

Fecha de Publicación: 26/02/2025

Cómo citar el artículo

García Mazo, C. M. (2025). Aplicación del Modelo Media Varianza con *Machine Learning* para Optimización de Portafolios de Inversión [Application of the Mean Variance Model with Machine Learning for Investment Portfolios Optimization]. *European Public & Social Innovation Review*, 10, 01-20. <https://doi.org/10.31637/epsir-2025-1844>

Resumen

Introducción: La optimización de portafolios de inversión busca encontrar el conjunto óptimo de activos que maximicen la rentabilidad bajo un nivel de riesgo determinado. Este estudio propone el uso del Modelo de Media Varianza (MMV), combinado con la regresión LASSO y la Simulación Monte Carlo, para optimizar un portafolio en el mercado colombiano.

Metodología: Se utilizaron datos históricos de acciones y TES del periodo 2015 a 2023. Primero, se aplicó el MMV para identificar portafolios eficientes, luego la regresión LASSO para seleccionar activos clave y, finalmente, la Simulación Monte Carlo para evaluar escenarios y construir carteras óptimas. **Resultados:** El portafolio óptimo está compuesto por TES (37,65%), Grupo Energía Bogotá (23,35%), Nutresa (20,71%), ISA (10,63%) y Bancolombia (7,67%). La rentabilidad del portafolio óptimo es 0,010123%, y su volatilidad es 0,762192%.

Discusión y Conclusiones: El estudio destaca la importancia de combinar técnicas computacionales con modelos clásicos para optimizar portafolios en mercados emergentes. Se concluye que el MMV, junto con *Machine Learning* y la Simulación Monte Carlo, es adecuado para optimizar portafolios y maximizar los beneficios en un nivel de riesgo determinado.

Palabras clave: Portafolio de Inversión; Rentabilidad; Volatilidad; Modelo Media Varianza; *Machine Learning*; Simulación Montecarlo; Portafolio óptimo, Frontera Eficiente.

Abstract

Introduction: Investment portfolio optimisation seeks to find the optimal set of assets that maximise returns under a given level of risk. This study proposes the use of the Mean Variance Model (MMV), combined with LASSO regression and Monte Carlo Simulation, to optimise a portfolio in the Colombian market. **Methodology:** Historical stock and TES data from 2015 to 2023 were used. First, MMV was applied to identify efficient portfolios, then LASSO regression to select key assets and, finally, Monte Carlo Simulation to evaluate scenarios and construct optimal portfolios. **Results:** The optimal portfolio is composed of TES (37.65%), Grupo Energía Bogotá (23.35%), Nutresa (20.71%), ISA (10.63%) and Bancolombia (7.67%). The optimal portfolio return is 0.010123%, and its volatility is 0.762192%. **Discussion and Conclusions:** The study highlights the importance of combining computational techniques with classical models to optimise portfolios in emerging markets. It is concluded that MMV, together with Machine Learning and Monte Carlo Simulation, is suitable for optimising portfolios and maximising returns at a given level of risk.

Keywords: Investment Portfolio; Profitability; Volatility; Variance Media Model; Machine Learning; Montecarlo Simulation; Optimal Portfolio, Efficient Frontier.

1. Introducción

La optimización de portafolios de inversión es un tema central en el ámbito de las finanzas, puesto que permite a los inversionistas obtener un nivel de rentabilidad a un riesgo dado en un mercado caracterizado por el riesgo y la incertidumbre. Este estudio se centra en el contexto del mercado financiero colombiano, un país emergente donde los inversionistas enfrentan desafíos debido a factores económicos, políticos y regulatorios.

Numerosas investigaciones, entre ellas (Chaweewanchon y Chaysiri, 2022; Puebla Maldonado, 2021; Safitri *et al.*, 2020), han abordado el uso del Modelo Media-Varianza (MMV) como una herramienta importante para la obtención de portafolios óptimos de inversión. Este modelo ha demostrado ser eficaz al identificar carteras eficientes. Sin embargo, a pesar de su aplicabilidad, el MMV presenta limitaciones, como su dependencia a los datos históricos y el uso de la distribución normal en los retornos de los activos. Estas limitaciones han impulsado al desarrollo de metodologías complementarias como la inclusión del tercer y cuarto momento (asimetría y la curtosis), los algoritmos genéticos, las técnicas Deep Learning, las Redes Neuronales, el *Machine Learning*, entre otros.

A pesar de estos avances, existe poca la literatura relacionada con la aplicación de técnicas computacionales avanzadas, como la regresión LASSO y la Simulación Monte Carlo, para optimizar portafolios en mercados emergentes como el colombiano, por lo que es necesario indagar cómo estas herramientas pueden mejorar la construcción de carteras eficientes al superar las limitaciones tradicionales del MMV y adaptarse a las particularidades de la región de análisis. Esta brecha representa una oportunidad para desarrollar modelos más precisos que respondan a las necesidades de los inversionistas en contextos específicos, puesto que al incorporar herramientas como la regresión LASSO, es posible seleccionar los activos más relevantes dentro del portafolio, eliminando aquellos que no contribuyen significativamente al rendimiento general de la cartera. De manera similar, la Simulación Monte Carlo permite modelar escenarios diversos y generar configuraciones óptimas basadas en una evaluación de las relaciones entre los activos.

Dado lo anterior, el objetivo principal de esta propuesta es aplicar el MMV, combinado con la regresión LASSO y la Simulación Monte Carlo, para optimizar un portafolio de inversiones en el mercado colombiano. Este enfoque permite evaluar la efectividad de estas herramientas para superar las limitaciones de los modelos tradicionales y ofrece una metodología innovadora para la toma de decisiones financieras. Los resultados de esta investigación tienen implicaciones significativas para los gestores de carteras e inversionistas que buscan estrategias adaptadas a las características de los mercados emergentes.

Este artículo está dividido en las siguientes secciones. En la primera sección presenta el marco teórico donde se habla del modelo MMV, aplicaciones del modelo media varianza hacia el sector bursátil y modelos de optimización utilizados para determinar el portafolio de inversión, técnica de *Machine Learning*. En la segunda sección se habla sobre el método utilizado en esta propuesta. En la tercera parte, se presenta los resultados. En la cuarta sección se muestra la discusión y finalmente se presenta las conclusiones.

La optimización de portafolios de inversión es un tema central en el ámbito de las finanzas, puesto que permite a los inversionistas obtener un nivel de rentabilidad a un riesgo dado en un mercado caracterizado por el riesgo y la incertidumbre. Este estudio se centra en el contexto del mercado financiero colombiano, un país emergente donde los inversionistas enfrentan desafíos debido a factores económicos, políticos y regulatorios.

2. Marco Teórico

2.1. Modelo Media Varianza (MMV)

El análisis de Markowitz se inicia a partir del problema que enfrenta cada inversionista al querer conformar su portafolio de inversión, es decir, seleccionar una cartera con una mayor rentabilidad y un menor riesgo. Lo que hizo Markowitz, fue modelar la racionalidad del inversionista en el mercado de capitales, reconociendo que el comportamiento racional de los inversionistas está representado por la condición de una mayor rentabilidad y un menor riesgo (La Torre y Mendivil, 2018), estableciendo las bases para lo que hoy se conoce como la teoría moderna de carteras o Modelo Media-Varianza (MMV). Los supuestos que se presentan en el modelo son los siguientes (Adcock, 2004; Cru y Hu, 2010; Grossi y Laurini, 2020; Palczewski y Palczewski, 2019; Saranya y Prasanna, 2014):

- Los inversionistas escogen la cartera con el rendimiento más alto, en el caso que tengan que elegir entre dos carteras similares (supuesto de insaciabilidad).
- Los inversionistas son aversos al riesgo, debido a que escogerán la cartera de menor varianza.
- La selección de inversiones es estrictamente para un periodo.
- Los mercados de valores operan sin costos de operación.
- No se presentan asimetrías de información, pues toda la información sobre los activos y sobre cualquier dato importante para la fijación del precio, está a disposición de todos los inversionistas.
- Los inversionistas tienen expectativas homogéneas.

- Toda decisión de inversión es tomada en una situación de riesgo, los inversionistas se mueven en un mundo de incertidumbre.
- La rentabilidad de un activo financiero para cualquier período futuro es una variable aleatoria que se supone presenta una distribución normal.
- Las rentabilidades de los distintos activos financieros no fluctúan de manera independiente, en vista de que están correlacionadas.

El MMV pretende formar la cartera óptima maximizando la rentabilidad esperada y minimizando el riesgo en función de la varianza de las tasas de rentabilidad de los valores (Jerončić y Aljinović, 2011; Preda y Ciumara, 2008). Este modelo considera la diversificación de la cartera no sólo por valores sino también por sectores, haciendo hincapié en el análisis de los indicadores financieros para evitar valores con malos resultados financieros (Jerončić y Aljinović, 2011). Esta herramienta parte del supuesto de que los rendimientos de las acciones siguen una distribución normal, pero se ha ampliado añadiendo momentos de orden superior como la asimetría y la curtosis para estimar mejor los riesgos de la cartera (Saranya y Prasanna, 2014). El MMV utiliza el concepto de carteras eficientes, que son las que ofrecen la mayor rentabilidad para un determinado nivel de riesgo lo que permite a los inversionistas reducir los riesgos y maximizar la rentabilidad de sus inversiones (Pandey, 2012), y calcula la desviación típica y la rentabilidad de cada cartera factible para identificar la frontera eficiente (Devianto *et al.*, 2018; Pandey, 2012).

Además, este tiene en cuenta la relación entre riesgo y rentabilidad, con el objetivo de construir carteras que equilibren la rentabilidad esperada y el riesgo, lo que lo hace adecuado para los inversores con aversión al riesgo que buscan una rentabilidad anual sólida con un riesgo relativamente bajo (Álvarez *et al.*, 2022; Jerončić y Aljinović, 2011).

Markowitz (Markowitz, 1952) identificó que la diversificación conlleva un beneficio importante para el inversionista, por medio de ella se puede reducir el riesgo de un determinado nivel de retorno esperado. La diversificación está fundamentada en la correlación entre los activos puesto que si la correlación entre la rentabilidad de los activos es perfecta y negativa, la diversificación hace desaparecer completamente el riesgo del portafolio, conllevando a la maximización de su rentabilidad (Meiqi Li, 2023).

Por otro lado, el modelo se ha ampliado para incluir el volumen medio de negociación de las acciones como factor para cuantificar los componentes de la cartera en función de su incremento potencial de precio, lo que permite mejorar la construcción de carteras (D. Yanushevsky y Yanushevsky, 2016; R. Yanushevsky y Yanushevsky'S, 2015). Sin embargo, este método presenta limitaciones como: El modelo original de Markowitz supone una distribución normal de los rendimientos de las acciones, lo que puede no ser cierto en escenarios reales, dando lugar a carteras subóptimas y haciéndolo inadecuado para estimar los riesgos de las carteras (Saranya y Prasanna, 2014). Las deficiencias del modelo han llevado al desarrollo de adaptaciones modernas que abordan sus limitaciones, como la inclusión de momentos superiores y la modificación de la función de utilidad basada en el modelo de Markowitz para tener en cuenta las preferencias de riesgo de los inversores (Malakhova *et al.*, 2021; Mandal y Thakur, 2024).

Con respecto a las adaptaciones modernas del modelo de Markowitz incluyen la incorporación de momentos de orden superior como la asimetría y la curtosis en la optimización de carteras para captar mejor el comportamiento real del mercado financiero y mejorar la modelización y el análisis de los datos bursátiles (Mandal y Thakur, 2024; Saranya y Prasanna, 2014).

Por ejemplo, el marco Markowitz 2.0, que aprovecha el pensamiento económico y la tecnología más recientes, aborda las limitaciones de la optimización tradicional media-varianza y ofrece una optimización mejorada de la cartera utilizando distribuciones discretas multivariantes suavizadas (SMDD) (Kaplan y Savage, 2011). El modelo de Markowitz es una herramienta que es utilizada para calcular carteras de inversión óptimas, pero sus limitaciones han dado lugar a adaptaciones modernas, con la finalidad de eliminar sus deficiencias y ofrecer técnicas de optimización de carteras más adecuadas. Uno de los avances más significativos ha sido la incorporación de herramientas computacionales y métodos de simulación, como el *Machine Learning*, que permiten a los analistas y gestores de carteras modelar escenarios complejos y evaluar el desempeño potencial de diversas combinaciones de activos bajo-múltiples supuestos y condiciones de mercado.

2.2. Aplicaciones del Modelo Media Varianza al mercado Bursátil

El MMV ha sido utilizado ampliamente en la construcción de portafolios óptimos desde su introducción en la década de 1950. Como se ha mencionado anteriormente, esta herramienta busca maximizar el retorno esperado para un nivel dado de riesgo o minimizar el riesgo para un retorno esperado, utilizando una matriz de covarianza para evaluar las relaciones entre los rendimientos de los activos. Algunos de los trabajos que han utilizado el MMV se puede mencionar: (Y. Chen *et al.*, 2024) demostraron cómo, al aplicar el modelo con restricciones como el índice SPX conllevando a mejor desempeño en términos de retorno esperado. Este hallazgo resalta la importancia de incorporar índices de referencia al optimizar portafolios. (Wang, 2023) analizó cómo el MMV favorece a las acciones de alto crecimiento cuando se maximiza la razón de Sharpe. (Wang, 2023) también mostró las limitaciones que se pueden presentar al reducir marginalmente el riesgo en acciones más volátiles.

Por otro lado, (Alkindi *et al.*, 2022) compararon el modelo de Markowitz con el Modelo de Índice Único (MIU), concluyendo que este último puede generar mayores, pues MIU puede generar un beneficio del 14,86% con un nivel de riesgo del 8,73% frente a la tasa de rentabilidad de los activos libres de riesgo del 5,17%. Mientras el modelo de Markowitz puede generar una rentabilidad de cartera del 0,74% con un riesgo de cartera del 4,28%, este no proporciona una rentabilidad óptima porque la rentabilidad esperada de la cartera del modelo de Markowitz es inferior a la Tasa de Rentabilidad de los Activos Libres de Riesgo. También, (Zhang, 2024) hizo este análisis de comparar estos dos modelos en el mercado estadounidense, mostrando que ambos pueden alcanzar ratios de Sharpe similares, aunque el MIU es más sencillo de calcular cuando se manejan grandes cantidades de datos.

(Mengyang Li, 2024) implementó el modelo de Markowitz y el MIU para analizar siete tipos de acciones bajo diferentes restricciones, mostrando cómo una diversificación adecuada puede maximizar la razón de Sharpe. En el mercado bursátil de los Estados Unidos, se realizó un análisis comparativo entre dos estrategias de inversión ampliamente utilizadas: el modelo de Markowitz y el modelo de índices. (Zheng, 2024) examinó el comportamiento del índice S&P 500 junto con seis acciones provenientes de distintos sectores, con el objetivo de evaluar la eficacia del MMV y MIU. Los resultados mostraron que el modelo de Markowitz presenta un mejor desempeño en la diversificación del riesgo entre múltiples inversiones, mientras que el MIU se centra en una única inversión, para este caso es el S&P 500. Aunque ambos enfoques presentaron rendimientos ajustados al mismo nivel de riesgo, el MMV evidenció un desempeño superior al calcular el índice de Sharpe.

De acuerdo con los resultados, esta investigación proporciona a los inversionistas elementos para seleccionar la estrategia que mejor se adapte a su perfil de riesgo y metas financieras, teniendo en cuenta las condiciones del mercado.

Por otro lado, (Yao, 2023) aplicó el MMV y el MIU para calcular portafolios con mínima varianza y máxima razón de Sharpe, mostrando la importancia de incorporar activos libres de riesgo y restricciones adicionales.

El Modelo de Markowitz revolucionó las estrategias de inversión en bolsa al ofrecer una herramienta para minimizar riesgos y maximizar rendimientos mediante la diversificación de activos. (Feng, 2022) se centró en analizar su aplicabilidad en contextos reales, considerando que el modelo original se desarrolló bajo supuestos teóricos de mercados perfectos e inversionistas racionales. Para ello, se estudiaron 10 acciones de diferentes empresas junto con el índice S&P 500, calculando tanto la rentabilidad esperada como el riesgo asociado, y determinando las combinaciones óptimas de inversión. Asimismo, se incorporaron cinco restricciones prácticas al análisis, con el propósito de aproximarlos a escenarios reales. Luego se compararon los resultados obtenidos con la versión teórica del modelo. Los hallazgos muestran que, pese a sus limitaciones conceptuales, el Modelo de Markowitz constituye una herramienta adecuada para que los inversionistas optimicen sus portafolios y logren mejores rendimientos en contextos reales.

En cuanto el uso de programas informáticos comunes como el Excel, (Mu, 2024) analizó el modelo de Markowitz en Solver (Excel), evaluando su desempeño bajo diversas restricciones prácticas y ofreciendo perspectivas útiles para la gestión de portafolios. Investigó las diferencias en la asignación de activos y las características de riesgo-retorno entre ambos modelos, concluyendo que el modelo de Markowitz es superior en diversificación de riesgos. (Shi y Zhu, 2021) mostraron el impacto de las restricciones sobre las fronteras eficientes del modelo de Markowitz, proporcionando una perspectiva integral sobre la optimización de portafolios en el mercado de valores de Nueva York. (Baydalin, 2024) presentó una metodología de optimización basada en el modelo de Markowitz utilizando algoritmos metaheurísticos, adaptando la teoría clásica a las complejidades de los mercados modernos. (Chang, 2022) discutió las limitaciones del modelo debido a su dependencia de datos históricos, destacando la necesidad de considerar factores específicos del mercado y de las empresas al tomar decisiones de inversión. (Chai, 2023) investigó la optimización de portafolios en empresas de alto nivel, enfatizando la inclusión de costos de transacción y restricciones de liquidez en la evaluación del modelo.

En cuanto al contexto colombiano, (Mahecha-Pinzón y Pacheco-Suárez, 2018) aplicaron el CAPM, identificando un portafolio eficiente que incluye acciones de empresas destacadas como BOGOTÁ, GRUPOSURA y PFBCOLOMB, demostrando cómo este modelo puede guiar a los inversionistas hacia decisiones de bajo riesgo y alta diversificación. La comparación entre portafolios regionales e internacionales también ha sido objeto de estudio, como en la investigación de (González-Bueno y Chacón-Arias, 2014) quienes analizaron la eficiencia de un portafolio colombiano frente a otro latinoamericano. Los resultados muestran que la diversificación internacional puede ofrecer una ventaja en la gestión del riesgo sistemático, aunque las condiciones específicas de mercado y la volatilidad regional pueden influir significativamente en el rendimiento.

En relación con el modelo Black-Litterman ha demostrado ser una herramienta clave para incorporar expectativas del inversionista y datos históricos. (Giraldo-Cárdenas *et al.*, 2015) aplicaron este modelo al índice COLCAP, encontrando que mejora la selección de portafolios al equilibrar la volatilidad y las expectativas de los agentes de mercado. Este modelo permite construir carteras eficientes frente a los cambios del mercado y es útil en mercados emergentes con alta volatilidad como el colombiano. (Ossa González, 2023) comparó los modelos de Black-Litterman, MMV y CAPM utilizando acciones en el mercado colombiano.

Los resultados mostraron que el modelo de Markowitz ofrece los rendimientos adecuados, mientras que Black-Litterman proporciona una perspectiva óptimo entre el riesgo y el rendimiento, en el caso de que las opiniones del inversionista divergen de las condiciones del mercado. Por otro lado, (Rodríguez-Marín, 2018) estudió la aplicación del MMV y su comparación con el modelo Graham y fondos bursátiles. Su estudio sobre el índice COLCAP mostró la importancia de combinar el MMV con los análisis técnico y fundamental y para optimizar portafolios en el corto plazo. La investigación, también evidenció que las condiciones macroeconómicas afectan el desempeño de las carteras.

Esta revisión de la literatura muestra que el MMV sigue siendo un referente clave para la construcción de portafolios óptimos de inversión. Sin embargo, estos estudios señalan limitaciones como su dependencia de datos históricos, la necesidad de incluir los costos de transacción y las restricciones de liquidez. En cuanto al Modelo de Índice Único (MIU) ofrece ventajas de ser un método simple y adecuado en mercados con grandes volúmenes de datos. Sin embargo, en algunos casos muestra menor capacidad de diversificación. El Modelo Black-Litterman incluye las opiniones de los inversionistas y las condiciones del mercado, resultando útil en contextos con alta volatilidad o cuando se buscan ajustes a los activos de las carteras.

2.3. Modelos de optimización utilizados para determinar el portafolio óptimo de inversión

El MMV ha evolucionado desde los postulados de Harry Markowitz en 1952, extendiéndose hacia el empleo de métodos avanzados como *Machine Learning*, Algoritmos Genéticos, Redes Neuronales, Modelos Matemáticos, entre otros. (Syahla *et al.*, 2024) usaron algoritmos genéticos para identificar combinaciones óptimas de activos, destacando su efectividad para minimizar riesgos en el contexto del índice LQ45 de Indonesia. Así mismo, (S. Chen, 2022) utilizó esta misma tecnología para abordar las limitaciones estocásticas en portafolios de inversión.

Por otro lado, (Basuki *et al.*, 2019) abordaron la optimización de portafolios desde un enfoque algebraico lineal, proporcionando fórmulas útiles para determinar los pesos óptimos a partir de la matriz de covarianza. Paralelamente, (Zhou y Zhang, 2023) compararon el MMV, el CAPM y el FF3F en la optimización de portafolios en el sector industrial americano. Los resultados muestran que la composición de las carteras óptimas varía según el modelo de valoración empleado. Por ejemplo, en el MMV, los activos AEP (energía) y el ETF (oro) dominan en las carteras cuando se calcula el índice de Sharpe y el MMV, respectivamente. En el modelo FF3F, AT&T (comunicaciones) y el ETF (oro) lideran en dichas carteras. Respecto al CAPM, Google (tecnología) y el ETF (oro) presentan un mayor peso en las carteras cuando se calcula el índice Sharpe y el MMV. Estos hallazgos son relevantes para inversionistas interesados en los sectores: energético, comunicaciones, tecnológico, commodities como el oro y automovilístico, facilitando la construcción de carteras eficientes.

En relación con las redes neurales, (Ouyang, 2022) aplicó la regresión Adaboost y Bayesiana Ridge para seleccionar carteras óptimas en la Bolsa de Nueva York, destacando la superioridad de redes neuronales frente a algoritmos emergentes en condiciones específicas. En términos de modelos probabilísticos, (Hernandez y De Campos, 2023) introducen circuitos probabilísticos credales para manejar incertidumbres mediante la teoría de probabilidades imprecisas, mientras que (Abuzov, 2024) combina métodos clásicos con aprendizaje automático para ajustar perfiles de riesgo en condiciones modernas de inversión.

La literatura también refleja un interés en la revisión modelos deterministas. (Kalayci *et al.*, 2019) analizan 175 artículos publicados en dos décadas, categorizando enfoques exactos y aproximados para la optimización de portafolios de CMMV.

(Ghanbari *et al.*, 2023) realizan un análisis bibliométrico sobre medidas de riesgo en la optimización de portafolios, identificando métricas utilizadas con mayor frecuencia y proporcionando un mapa del conocimiento acumulado en el campo durante las últimas dos décadas.

En esta revisión de la literatura se observa la evolución del MMV hacia enfoques que incorporan tecnologías computacionales avanzadas. La integración de herramientas como el *Machine Learning*, Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos ha mostrado una superioridad en sus resultados frente a los métodos tradicionales, especialmente en la predicción de rendimientos y la optimización bajo restricciones complejas. Los análisis comparativos entre modelos clásicos evidencian diferencias significativas en la composición óptima de los portafolios dependiendo de la metodología aplicada.

2.4. Técnica *Machine Learning* (MI)

La optimización de portafolios ha evolucionado significativamente con la integración de técnicas de aprendizaje automático (W. Chen *et al.*, 2021) analizaron un modelo híbrido que combina el algoritmo XGBoost con firefly algorithm (IFA) para predecir precios y emplearon el MMV en la selección de carteras, mostrando resultados superiores al incorporar predicciones precisas. (Padhi *et al.*, 2022) implementaron un enfoque de dos etapas que utiliza el modelo media-varianza para seleccionar acciones y ML en línea con una combinación de perceptrón y algoritmo pasivo-agresivo, para predecir los futuros movimientos del precio de las acciones en el próximo periodo, destacando la efectividad de las estrategias de aprendizaje conjunto. (Ban *et al.*, 2018) proponen un modelo de regularización basado en el rendimiento (PBR) que integra métodos de *Machine Learning* como la validación cruzada, mostrando superioridad sobre enfoques tradicionales como MMV y Media-CVaR. (Hu, 2024) utiliza simulaciones Monte Carlo combinadas con *Machine Learning* para desarrollar estrategias de maximización del Ratio de Sharpe y minimización del riesgo. (Paiva *et al.*, 2019) propusieron un modelo donde unen el VM con MV para inversiones diarias en el mercado brasileño, logrando optimizar parámetros en escenarios de alta variabilidad.

En modelos Deep Learning, (Yilin *et al.*, 2021) combinaron la predicción de rentabilidad en la formación de carteras con dos modelos de aprendizaje automático, Random Forest (RF) and Support Vector Regression (SVR), y tres modelos deep learning (LSTM neural network), deep multilayer perceptron (DMMLP). La investigación utilizó datos históricos de 9 años, de 2007 a 2015, de las acciones componentes del índice China securities 100. (Yilin *et al.*, 2021) recomiendan a los inversionistas crear un MMVF con predicción de rentabilidad RF para la inversión en negociación diaria. (Z. Chen, 2024) analizó la combinación de algoritmos como LSTM, redes convolucionales y aprendizaje por refuerzo, concluyendo que la combinación de múltiples algoritmos mejora el rendimiento ajustado al riesgo. (Kobets y Savchenko, 2022) utilizaron herramientas FinTech como Robo-Advisors para reequilibrar portafolios basados en predicciones de LSTM, concluyendo que estas soluciones son más efectivas incluso en periodos de recesión. (Al-Muharraqi y Messaadia, 2023) mostraron la aplicación de LSTM en la predicción de retornos, resaltando el rol del MMV como enfoque predominante en la optimización.

3. Método

La gestión de activos financieros se basa en el análisis de la incertidumbre que caracteriza los rendimientos futuros. En este contexto, el MMV utiliza la aplicación de modelos probabilísticos que facilitan la estimación tanto del rendimiento esperado como del riesgo asociado al portafolio de inversión.

Este enfoque teórico considera que el rendimiento esperado se representa por el valor medio de la distribución (primer momento), mientras que el riesgo se evalúa a través de la varianza o la desviación estándar (segundo momento de la distribución). Estos indicadores, en tiempo discreto se calculan a partir de la ecuación 1 y 2 (García y Moreno, 2011).

$$1) \quad \bar{r} = E(r) = \sum_r r f(r)$$

$$2) \quad \sigma^2 = \sum_r (r - \bar{r})^2 f(r)$$

Dónde $f(r)$ representa la función de probabilidad del retorno, la cual puede ser continua o discreta (García y Moreno, 2011).

Además, el modelo requiere la relación entre los rendimientos de estos activos, es decir, la covarianza (ecuación 3) y el coeficiente de correlación (ecuación 4) (García y Moreno, 2011).

$$3) \quad \sigma_{ij} = E\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] = E(r_i r_j) = E(r_j r_i)$$

$$4) \quad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

El mercado presenta diversas opciones de activos financieros, por lo que, al construir un portafolio compuesto por N activos individuales, es posible determinar tanto el rendimiento esperado como la varianza utilizando las ecuaciones 5 y 6 (García y Moreno, 2011).

$$5) \quad E(r_p) = W^T E(r)$$

Dónde:

W, es la columna de los pesos que se le asigna a los N activos en el portafolio, y la suma de este debe ser igual a 1. Esta restricción indica que el inversionista gasta exactamente su capital disponible (Botero *et al.*, 2024).

$$6) \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

El rendimiento del portafolio resulta ser el promedio de los N rendimientos esperados individuales, ponderados por la participación de cada activo individual en el portafolio (García y Moreno, 2011):

$$7) \quad E(r_p) = \bar{r}_p = E\left(\sum_{i=1}^n r_i w_i\right) = \sum_{i=1}^n E(r_i) w_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i w_i$$

En cuanto a la varianza del portafolio, se determina a partir de (García y Moreno, 2011):

$$8) \sigma^2(r_p) = W^T \Omega W = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N] \begin{bmatrix} Var(i,i) & Cov(i,j) & \dots & Cov(i,N) \\ Cov(j,i) & Var(j,j) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(N,i) & \dots & \dots & Var(N,N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Dónde:

$[w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N]$: pesos de cada activo individual

$\sigma^2(r_p)$: Varianza del portafolio

$$\Omega = \begin{bmatrix} Var(i,i) & Cov(i,j) & \dots & Cov(i,N) \\ Cov(j,i) & Var(j,j) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(N,i) & \dots & \dots & Var(N,N) \end{bmatrix} : \text{Matriz de varianzas y covarianzas}$$

Por otro lado, Markowitz evidenció que es posible identificar un conjunto eficiente de combinaciones entre el retorno esperado y el riesgo, conocido como la Frontera Eficiente (FE). Para alcanzar este resultado, se debe resolver el siguiente programa cuadrático paramétrico (García y Moreno, 2011):

$$9) \quad \min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = W^T \Omega W$$

Sujeto a:

$$10) \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$11) \quad \sum_{i=1}^N w_i E(r_i) = E(r_p)$$

La Frontera Eficiente (FE) se describe como una curva convexa, compuesta por la totalidad de carteras eficientes, es decir, aquellas que ofrecen un alto rendimiento con un nivel de riesgo menor (Botero *et al.*, 2024).

En cuanto la utilización del *Machine Learning*, se utilizó la regresión Lasso (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator). Esta metodología es un método de regresión lineal que incorpora regularización, lo que implica la aplicación de una penalización destinada a minimizar la suma de los valores absolutos de los coeficientes del modelo. Este enfoque presenta aspectos positivos como: Lasso se destaca por su capacidad para realizar selección de características, debido a que puede reducir a cero los coeficientes de las variables menos relevantes, lo que equivale a eliminarlas del modelo. Esto lo convierte en una herramienta eficaz tanto para la predicción como para identificar los factores importantes dentro de un conjunto de datos.

Además, al aplicar regularización, Lasso evita que los coeficientes de las variables adopten valores extremadamente altos, lo que contribuye a mitigar el riesgo de sobreajuste, también conocido como overfitting, y mejora la capacidad del modelo para generalizar a nuevos datos. Otro aspecto importante de este método es su capacidad para manejar ruido y valores atípicos, pues al limitar la magnitud de los coeficientes reduce el impacto de anomalías en los datos, mejorando así la robustez del modelo. En esta propuesta la regresión Lasso resulta adecuada, en vista de que permite predecir retornos esperados de activos basándose en datos históricos (Hauck y Woutersen, 2024). La regresión Lasso se representa con la siguiente ecuación:

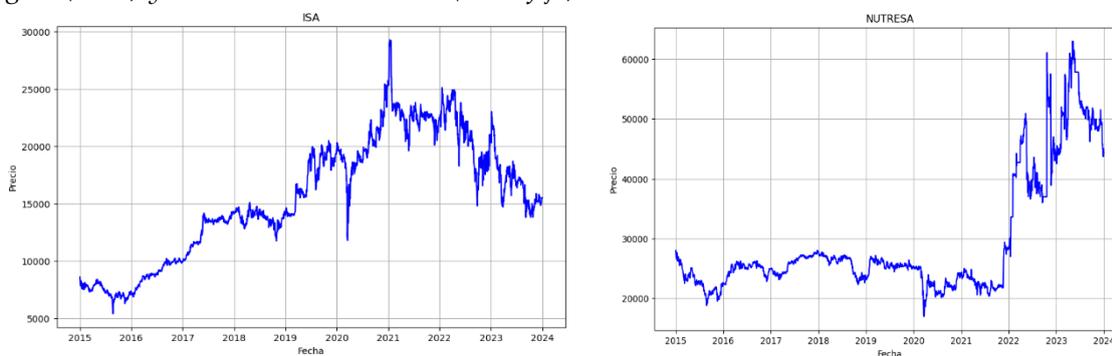
$$12) \quad \gamma LASSO = \arg \min_{\gamma} \sum_i (Y_i - \alpha - \gamma X_i)^2 + \lambda |\gamma|, \quad \lambda > 0$$

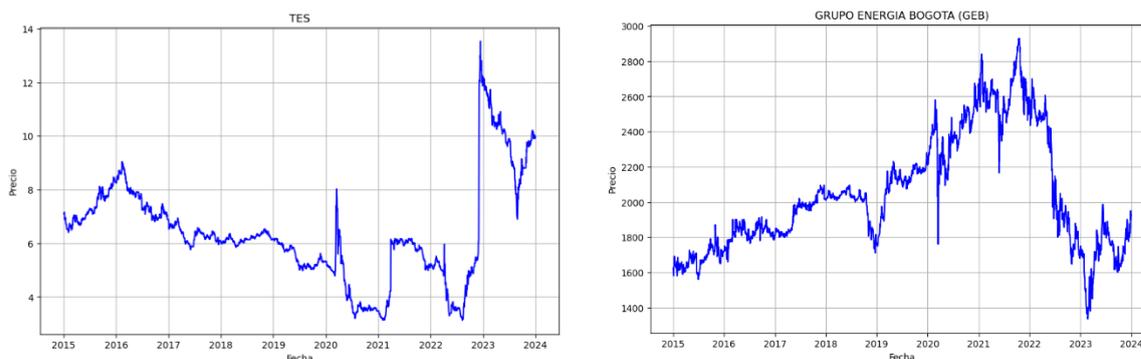
Donde λ es el parámetro de penalidad.

En relación con la conformación del portafolio, se seleccionan los activos financieros eniendo en cuenta el mercado en el que participan, y la diversificación (Martínez-Sánchez *et al.*, 2021). Para esta propuesta se eligieron las acciones Bancolombia, Nutresa, ISA, Grupo Energía Bogotá (GEB) y el TES (renta fija). El periodo de análisis comprende desde el 2 de enero de 2015 hasta el 31 de diciembre de 2023. La información histórica de los precios de cierre diarios de las acciones y la rentabilidad del TES fue extraída a partir del portal financiero del Grupo AVAL en la página <https://www.grupoaval.com/wps/portal/grupo-aval/aval/portal-financiero> (ver figura 1). Por otra parte, esta propuesta emplea la Simulación Montecarlo para identificar el conjunto y la frontera eficiente del portafolio. Esta metodología se fundamenta en el muestreo aleatorio y permite examinar sistemas o problemáticas complejas que presentan incertidumbre. En el ámbito de la construcción de portafolios, la aplicación la Simulación Montecarlo da la posibilidad de generar grandes cantidades de combinaciones de activos con asignaciones de peso diferentes. Al simular múltiples portafolios, es factible determinar tanto el conjunto óptimo, que agrupa las carteras con el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo específico, como la frontera efectiva, que engloba las carteras con el riesgo más bajo posible para un nivel de rendimiento dado. Además, la implementación de la Simulación Montecarlo en la optimización de portafolios ofrece la ventaja de analizar diversas configuraciones potenciales y escoger la alternativa más conveniente, tomando en cuenta las restricciones y objetivos establecidos (Botero *et al.*, 2024).

Figura 1.

Evolución histórica de los precios de cierra de las acciones Bancolombia, Nutresa, ISA, Grupo Energía Bogotá (GEB) y la rentabilidad del TES (renta fija).





Fuente: Elaboración propia (2024) con datos obtenidos a partir de (Grupo Aval, 2024)

4. Resultados

Un elemento importante para inversionista es formarse una visión comparativa de riesgos, volatilidades y sesgos históricos, información clave a la hora de construir portafolios, diversificar y gestionar el riesgo en el mercado colombiano, esto se da a partir de los cuatro momentos estadísticos. La tabla 1 presenta los estadísticos de los cinco activos, Bancolombia, Nutresa, ISA, Grupo Energía Bogotá -GEB- y TES, en el periodo comprendido entre el 2 de enero de 2015 y el 31 de diciembre de 2023. Los resultados permiten identificar diferencias significativas en cuanto a la volatilidad, la tendencia central y la forma de la distribución de sus precios (o tasas, en el caso de los TES).

En el caso de Bancolombia, la media, 31.283, y la mediana, 30.940, son cercanas, mientras que la moda, 25.500, es más baja, evidenciando una leve asimetría positiva (coeficiente de 0.389). La desviación estándar, 5.899, indica volatilidad moderada a alta, y la curtosis, 0.732, refleja colas algo más pesadas que lo normal. En Nutresa, el diferencial entre la media, 29.225, y la mediana, 25.465, es mayor, y la moda, 25.500, coincide casi con la mediana, lo que sugiere una fuerte asimetría positiva, 1.606, reforzada por la desviación estándar más elevada, 10.006, y por la curtosis, 1.332, señal de que existen valores altos que estiran la cola hacia la derecha.

ISA presenta una media, 15.724, y una mediana, 15.390, cercanas, con una moda, 14.400, algo menor y una asimetría cercana a cero (-0,043). La curtosis de -0,982 indica una distribución más aplanada y con menos eventos extremos, aunque la desviación estándar (5.242) y el rango (23.830) demuestran que ha habido oscilaciones importantes en el precio. El Grupo Energía Bogotá (GEB) presenta una media de 2.051 y la mediana 2.000 muy cercanas, con la moda (1.700) ligeramente más baja y una volatilidad absoluta reducida (desviación estándar de 0,327), lo que lo hace el activo más estable dentro de esta muestra, aunque en términos porcentuales puede seguir siendo significativo el cambio cuando el precio base se sitúa alrededor de 2. Los TES (renta fija), con una media de 6,353, una mediana de 6,144 y una moda de 6,13, muestra un rango de 10,41 y una desviación estándar de 1,874. La curtosis (0,874) y la asimetría positiva (0,769) en los TES señalan que se han dado valores altos en determinados momentos, generando una cola a la derecha.

De acuerdo con los resultados, Nutresa es la acción con mayor dispersión y sesgo positivo, Bancolombia e ISA presentan volatilidad moderada (aunque ISA muestra un perfil más cercano a la simetría y una curtosis negativa), GEB se distingue por su relativa estabilidad, y los TES, suelen considerarse menos riesgosos.

Tabla 1.*Estadísticos de las acciones y el activo de renta fija*

Variable	Bancolombia	Nutresa	ISA	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
Media	31.283	29.225	15.724	2.051	6,352959931
Mediana	30.940	25.465	15.390	2.000	6,144
Moda	25.500	25.500	14.400	1.700	6,13
Desviación estándar	5.899	10.006	5.242	327	1,874132449
Varianza de la muestra	34.799.139	100.129.217	27.481.731	106.753	3,512372437
Curtosis	- 0,732	1,332	- 0,982	- 0,620	0,874144868
Coficiente de asimetría	0,389	1,606	- 0,043	0,540	0,769224533
Rango	27.800	45.990	23.830	1.594	10,41
Mínimo	17.700	17.000	5.420	1.335	3,125
Máximo	45.500	62.990	29.250	2.929	13,535

Fuente: Elaboración propia (2024).

Con respecto a las rentabilidades de los activos financieros, la tabla 2 presenta los resultados. Desde la perspectiva de las rentabilidades diarias, se observa que Celsia presenta el mayor promedio (0,02329%), superando a Nutresa (0,01819%), TES (0,01331%), Bancolombia (0,00716%) y GEB (0,00670%). Por su parte, Nutresa, empresa enfocada en el sector de alimentos y consumo masivo, muestra una rentabilidad diaria relativamente elevada en comparación con Bancolombia, y con la compañía de servicios energéticos GEB. En cuanto a las rentabilidades anuales Celsia tiene un rendimiento de 5,87% anual, seguida por Nutresa (4,58%) y TES (3,36%), mientras que Bancolombia (1,80%) y GEB (1,69%) presentan valores más modestos.

Tabla 2.*Rentabilidad diaria y anual de los activos financieros*

Rentabilidad	Bancolombia	Nutresa	Celsia	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
Diaria	0,00716%	0,01819%	0,02329%	0,00670%	0,01331%
Anual	1,80%	4,58%	5,87%	1,69%	3,36%

Fuente: Elaboración propia 2024.

La tabla 3 presenta la volatilidad diaria y anual de las acciones y el TES. Los datos muestran una volatilidad diaria y anual relativamente alta en TES (2,10688%; 33,45%), seguida por Bancolombia (2,05604%; 32,64%), Nutresa (2,05463%; 32,62%) y Celsia (2,00897%; 31,89%), mientras que GEB (1,53200%; 24,32%) presenta el menor indicador. Un resultado significativo es el presentado por el TES, al ser un activo de renta fija, exhiba una volatilidad diaria más elevada que varias acciones. No obstante, este resultado puede explicarse por fluctuaciones significativas en las tasas de interés durante el periodo analizado.

Tabla 3.*Volatilidad diaria y anual de los activos financieros*

Volatilidad	Bancolombia	Nutresa	Celsia	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
Diaria	2,05604%	2,05463%	2,00897%	1,53200%	2,10688%
Anual	32,64%	32,62%	31,89%	24,32%	33,45%

Fuente: Elaboración propia 2024.

La matriz de varianza y covarianza (Tabla 4), así como la de correlación (Tabla 5), constituyen datos importantes para entender la interdependencia de los rendimientos de Bancolombia, Nutresa, ISA, Grupo Energía Bogotá (GEB) y el TES. De la matriz de varianza y covarianza se aprecia cómo la varianza de cada activo indica el nivel de dispersión que han experimentado los rendimientos diarios: Bancolombia, Nutresa e ISA presentan valores similares (0,000422730, 0,000422148 y 0,000403595, respectivamente), mientras GEB muestra una varianza menor (0,000234703) y el TES una varianza apenas más alta (0,000443894). Estas cifras están relacionadas con la volatilidad que se midió de manera individual en el análisis anterior y sugieren que, a pesar de pertenecer a sectores diferentes, Bancolombia, Nutresa e ISA han tenido variaciones diarias de magnitud semejante, mientras GEB mantiene un nivel de riesgo levemente más bajo, y el TES, contrario a lo que se esperaría en ciertos contextos de renta fija, no muestra una dispersión tan reducida.

Por su parte, las covarianzas permiten observar cómo se mueven conjuntamente dos activos. Muchas de estas son negativas (por ejemplo, entre Bancolombia y Nutresa, Bancolombia e ISA, o Nutresa e ISA), lo que indica que, en promedio, cuando uno de los activos experimenta un aumento en sus rendimientos diarios, el otro tiende a moverse en sentido contrario. El caso más llamativo es la relación negativa relativamente pronunciada entre Bancolombia e ISA (-0,000166818). En cambio, ISA-GEB presentan una covarianza positiva (0,000077211), consistente con la idea de que ambas empresas, asociadas al segmento energético, podrían responder a factores de mercado parecidos o tener flujos de ingresos con cierto comportamiento sincronizado.

Tabla 4.*Matriz de Varianza y Covarianza*

	Bancolombia	Nutresa	ISA	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
Bancolombia	0,000422730	-0,000065076	-0,000166818	-0,000057743	-0,000034431
Nutresa	-0,000065076	0,000422148	-0,000075770	-0,000045301	-0,000033280
ISA	-0,000166818	-0,000075770	0,000403595	0,000077211	-0,000054875
Grupo Energía Bogotá (GEB)	-0,000057743	-0,000045301	0,000077211	0,000234703	-0,000036218
TES	-0,000034431	-0,000033280	-0,000054875	-0,000036218	0,000443894

Fuente: Elaboración propia 2024.

Ahora analizando la matriz de correlación (Tabla 5), se evidencia cómo la mayoría de las asociaciones tienden a ser negativas. La correlación, a diferencia de la covarianza, permite dimensionar con mayor claridad la fuerza de la relación relativa entre los rendimientos de cada activo (en un rango de -1 a 1). Así, Bancolombia e ISA muestran una correlación negativa de -0,403867084, corroborando que hay una relación inversa entre sus fluctuaciones.

Por su parte, la correlación de ISA y GEB es positiva (0,25086828), una magnitud que, sin ser muy alta, resulta la más elevada del conjunto y reafirma la similitud sectorial o la sensibilidad compartida a eventos de mercado relacionados con la energía, transporte o distribución. El TES, pese a ser un instrumento de renta fija, registra correlaciones negativas, pero relativamente bajas en magnitud (por ejemplo, -0,079484332 con Bancolombia y -0,076879758 con Nutresa).

En el contexto de construcción de portafolios, la presencia de correlaciones negativas o bajas entre los activos implica un beneficio en términos de diversificación, pues combinarlos puede contribuir a mitigar la volatilidad general. Sin embargo, es relevante subrayar que el TES, siendo un activo soberano, no se comporta con la total estabilidad que, en teoría, algunos inversionistas esperarían de un activo de renta fija, y que los factores macroeconómicos y las fluctuaciones en la tasa de interés pueden ejercer mayor presión sobre sus precios. El panorama global sugiere así que, si bien existe diversificación gracias a correlaciones negativas, cada emisor presenta matices únicos, resultado que se da por la dinámica interna de su sector como de condiciones monetarias y regulatorias que afectan sus rendimientos a lo largo del periodo de análisis.

Tabla 5. Correlación de los activos financieros

	Bancolombia	Nutresa	ISA	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
Bancolombia	1	-0,154048692	-0,403867084	-0,183319836	-0,079484332
Nutresa	-0,154048692	1	-0,183564753	-0,14391941	-0,076879758
ISA	-0,403867084	-0,183564753	1	0,25086828	-0,129648001
Grupo Energía Bogotá (GEB)	-0,183319836	-0,14391941	0,25086828	1	-0,112209153
TES	-0,079484332	-0,076879758	-0,129648001	-0,112209153	1

Fuente: Elaboración propia 2024.

Respecto a los pesos óptimos (ver tabla 6) evidencian un portafolio en el que la proporción más alta se asigna al TES (37,65%), seguido por Grupo Energía Bogotá (GEB) con 23,35%, Nutresa con 20,71%, ISA con 10,63% y, finalmente, Bancolombia con 7,67%. Este orden de importancia en la distribución sugiere que, si bien el título de deuda pública (TES) muestra una volatilidad importante, el modelo de optimización ha encontrado en él una combinación atractiva de rentabilidad esperada y reducción del riesgo total del portafolio, seguramente por ser un activo de renta fija y con correlación negativa. El hecho de que GEB ocupe el segundo lugar obedece en buena medida a su menor volatilidad, comparada con otras emisoras del sector energético, y a que su correlación positiva con ISA.

Tabla 6.

Pesos óptimos

Bancolombia	Nutresa	ISA	Grupo Energía Bogotá (GEB)	TES
7,67%	20,71%	10,63%	23,35%	37,65%

Fuente: Elaboración propia 2024.

En la tabla 7 se presenta la Rentabilidad y Volatilidad del Portafolio óptimo de inversión construido con las participaciones estimadas en Bancolombia, Nutresa, ISA, Grupo Energía Bogotá (GEB) y el TES, arroja una rentabilidad de 0,010123% y una volatilidad de 0,762192%.

Tabla 7.

Rentabilidad y Volatilidad del Portafolio óptimo de inversión

Rentabilidad	Volatilidad
0,010123%	0,762192%

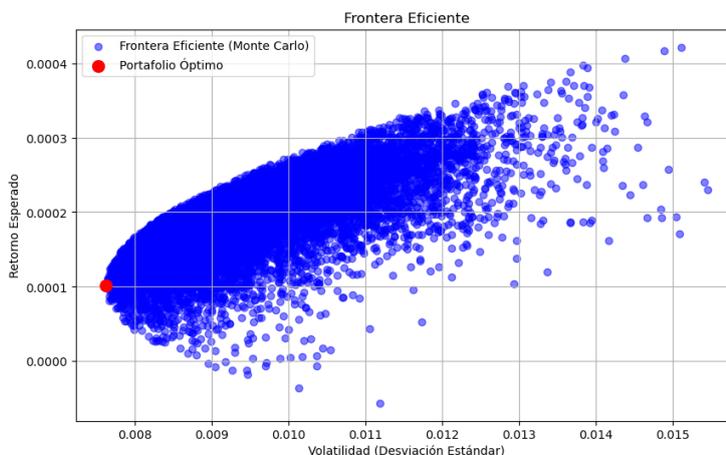
Fuente: Elaboración propia 2024.

La figura 2 presenta la Frontera Eficiente obtenida a partir de la Simulación Monte Carlo utilizando la regresión LASSO y el MMV. El eje horizontal de la figura corresponde a la volatilidad o desviación estándar de los rendimientos. Este refleja el nivel de riesgo que asume cada combinación; en tanto que el eje vertical, corresponde a la rentabilidad promedio. Los puntos azules representan las múltiples carteras generadas aleatoriamente con diferentes pesos de los activos, lo cual permite identificar la zona que optimiza el intercambio entre rentabilidad y riesgo.

El portafolio óptimo (marcado en rojo) se sitúa en el punto más favorable de esa nube de carteras posibles, pues equilibra los rendimientos esperados con la menor volatilidad alcanzable dentro de la muestra, su posición sobre la frontera refleja el máximo desempeño posible una vez consideradas las covariaciones y correlaciones entre los diferentes activos financieros.

Figura 2.

Frontera Eficiente



Fuente: Elaboración propia 2024.

5. Discusión

La presente discusión se centra en los resultados obtenidos a partir de la optimización del portafolio utilizando el Modelo Media-Varianza (MMV), complementado con la técnica de regresión LASSO y la Simulación Monte Carlo. En primer lugar, los resultados destacan que el activo de renta fija TES representa una proporción significativa (37,65%) dentro del portafolio óptimo, seguido por el Grupo Energía Bogotá (23,35%), Nutresa (20,71%), ISA (10,63%) y Bancolombia (7,67%). Esta cartera se orienta hacia una preferencia a activos con menores niveles de volatilidad relativa, el cual es consistente con los principios del MMV que priorizan la diversificación y la minimización del riesgo. En este contexto, se confirma lo expuesto por (Zhang, 2024), quien argumenta que el MMV favorece la gestión del riesgo, especialmente en mercados con alta volatilidad.

Machine Learning (regresión LASSO) ha demostrado ser efectiva para identificar los activos relevantes dentro del portafolio, eliminando aquellos con menor el rendimiento. Este método se ajusta con los hallazgos de (Hauck y Woutersen, 2024) quienes resaltan que LASSO es una herramienta útil para evitar el sobreajuste y mejorar la robustez de los modelos predictivos. Además, la inclusión de la Simulación Monte Carlo permitió evaluar diversas configuraciones de activos, confirmando su utilidad para modelar escenarios complejos y mejorar la estimación de la frontera eficiente, tal como lo establece (Botero *et al.*, 2024).

En cuanto a los momentos estadísticos de los activos, Nutresa presentó la mayor asimetría positiva y volatilidad, lo que sugiere una alta exposición a eventos extremos. Estos resultados concuerdan con lo presentado por (Saranya y Prasanna, 2014), quienes enfatizan la importancia de considerar el tercer y cuarto momento como la curtosis y la asimetría para capturar de manera más precisa los riesgos presentes en el portafolio. De manera similar, la las acciones del Grupo Energía Bogotá refuerza su atractivo dentro del portafolio, coherente con lo observado por (Jerončić y Aljinović, 2011) sobre la importancia de diversificar por sectores.

Otro aspecto importante es la correlación negativa predominante entre los activos, especialmente entre Bancolombia e ISA, lo que presenta el potencial de la diversificación para mitigar la volatilidad general del portafolio. Este hallazgo se ajusta con los principios del MMV, según los cuales la diversificación basada en correlaciones negativas puede reducir significativamente el riesgo total. Además, los resultados sugieren que la correlación positiva entre activos como ISA y GEB podría estar influenciada por su similitud en el sector de energía. Este punto es respaldado por (Ossa González, 2023) en el contexto del mercado colombiano.

La rentabilidad y volatilidad del portafolio óptimo son 0,010123% y 0,762192%, respectivamente. La posición del portafolio en la frontera eficiente refleja la aplicabilidad del modelo en escenarios reales, aunque se deben considerar las limitaciones inherentes, como la dependencia de datos históricos y la necesidad de ajustar las estimaciones a las condiciones cambiantes del mercado, tal como lo señalan (Chang, 2022).

6. Conclusiones

Dado lo anterior, el MMV ha evolucionado significativamente desde los postulados de Harry Markowitz en 1952, cuya Teoría Moderna de Portafolios (MPT) estableció las bases para seleccionar carteras eficientes mediante la combinación de activos que maximizan el rendimiento esperado y minimizan el riesgo a través de la varianza. Este enfoque ha sido complementado con modelos posteriores, como el Capital Asset Pricing Model (CAPM), y el modelo Black-Litterman (BL), los cuales han ampliado las capacidades analíticas y predictivas. Sin embargo, los estudios presentados en la revisión de la literatura enfatizan que es necesario que el MMV sea adaptado con la incorporación de factores prácticos y herramientas computacionales avanzadas.

El MMV, complementado con herramientas como la regresión LASSO y la Simulación Monte Carlo, ha demostrado ser una metodología robusta para para optimizar carteras, gestionar riesgos y maximizar los retornos. Este enfoque permite a los inversionistas diversificar sus activos y aumentar la rentabilidad al tiempo que reduce el riesgo de mercado.

La regresión LASSO es adecuada para seleccionar variables relevantes en grandes conjuntos de datos. Esta situación mejora el proceso de construcción de portafolios y asegura que los activos incluidos contribuyan de manera eficiente al rendimiento del portafolio.

Esta metodología también reduce el riesgo de sobreajuste y mejora la predictibilidad de los resultados.

El análisis de la asimetría y la curtosis en los activos ha permitido una evaluación más precisa del riesgo, evidenciando cómo estas medidas contribuyen a una mejor comprensión de los patrones de comportamiento de los activos dentro del mercado. Este enfoque es clave para manejar eventos extremos que podrían afectar la estabilidad del portafolio.

La validación del modelo en el contexto colombiano confirma su aplicabilidad para este tipo de mercado. Sin embargo, se requiere un análisis continuo para asegurar la efectividad de las decisiones, adaptando las estrategias a las condiciones y características cambiantes específicas de la región.

7. Referencias

- Al-Muharrqi, M. y Messaadia, M. (2023). Implementing Machine Learning in Optimizing Stock Portfolios: A review. *2023 International Conference On Cyber Management And Engineering (CyMaEn)*, 500-504. <https://doi.org/10.1109/CyMaEn57228.2023.10051023>
- Ban, G. Y., Karoui, N. y Lim, A. (2018). Machine Learning and Portfolio Optimization. *Manag. Sci.*, 64, 1136-1154. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2016.2644>
- Basuki, B., Sukono, S., Sofyan, D., Madio, S. y Puspitasari, N. (2019). Linear Algebra on investment portfolio optimization model. *Journal of Physics: Conference Series*, 1402. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1402/7/077089>
- Botero, S. B., García-Mazo, C. M. y Arboleda-Moreno, F. J. (2024). Power generation mix in Colombia including wind power: Markowitz portfolio efficient frontier analysis with machine learning. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 10(4). <https://doi.org/10.1016/j.joitmc.2024.100402>
- Chang, X. (2022). The application of the Full Markowitz Model in generating optimal investment portfolio. *2022 2nd International Conference on Management Science and Industrial Economy Development (MSIED 2022)*. <https://doi.org/10.23977/msied2022.040>
- Chen, S. (2022). Research on investment portfolio strategy based on intelligent optimization algorithm. *Proceedings of the 11th International Conference on Software and Information Engineering*. <https://doi.org/10.1145/3571513.3571526>
- Chen, W., Zhang, H., Mehlawat, M. y Jia, L. (2021). Mean-variance portfolio optimization using machine learning-based stock price prediction. *Appl. Soft Comput.*, 100, 106943. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106943>
- Alkindi, F., Sadalia, I y Muda, I. (2022). Analysis of Optimal Stock Portfolio Investment on The LQ45 Index Using the Markowitz Model and Single Index Model. *International Journal of Research and Review*, 9(11), 178-186. <https://doi.org/10.52403/ijrr.20221125>
- Chen, Z. (2024). Research on Portfolio Optimization Model based on Machine Learning Algorithm in Stock Market. *Transactions on Economics, Business and Management Research*. <https://doi.org/10.62051/sdqv4p21>

- Feng, Q. (2022). Optimal Portfolio Construction Based on Markowitz Model. *BCP Business & Management*. <https://doi.org/10.54691/bcpbm.v35i.3303>
- García, C. M. y Moreno, J. A. (2011). Optimización de portafolios de pensiones en Colombia: el esquema de multifondos, 2003-2010. *Ecos de Economía*, 15(33), 139-183.
- Grupo Aval. (2024). *Renta Fija - Tes*. Grupo Aval. <https://acortar.link/QO4bi7>
- Hauck, K. y Woutersen, T. (2024). *Explaining Ridge Regression and LASSO* (pp. 1-17). *Advances in Econometrics*. <https://acortar.link/BbhR7T>
- Hu, Y. (2024). Portfolio Optimization Using Machine Learning Method and Monte Carlo Simulation. *Highlights in Business, Economics and Management*. <https://doi.org/10.54097/farx3k44>
- Jerončić, M. y Aljinović, Z. (2011). Forming the optimal portfolio based on the markowitz model with diversification of companies by sectors. *Ekonomski Pregled*, 62(9-10), 583-606. <https://acortar.link/4d4qcB>
- Kaplan, P. D., y Savage, S. (2011). Markowitz 2.0. En *Frontiers of Modern Asset allocation* (pp. 325-349). <https://doi.org/10.1002/9781119205401.ch26>
- Kobets, V. y Savchenko, S. (2022). Building an Optimal Investment Portfolio with Python Machine Learning Tools. *Information Technology and Implementation*, 307-315. https://eur-ws.org/Vol-3347/Short_1.pdf
- Markowitz, H. (1952). PORTFOLIO SELECTION. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- Martínez-Sánchez, J. F., Cruz-García, S. y López-Castillo, J. I. (2021). Optimización de un portafolio con Python. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías Del ICBI*, 9(17), 132-135. <https://doi.org/10.29057/icbi.v9i17.6807>
- Ossa González, G. A. (2023). Comparación de los modelos de Black-Litterman, Markowitz y CAPM en la estimación de los rendimientos esperados en el mercado de renta variable en Colombia. *Revista Estrategia Organizacional*, 12(2), 29-53. <https://doi.org/10.22490/25392786.7230>
- Padhi, D., Padhy, N., Bhoi, A., Shafi, J. y Yesuf, S. H. (2022). *An Intelligent Fusion Model with Portfolio Selection and Machine Learning for Stock Market Prediction*. *Computational Intelligence and Neuroscience*. <https://doi.org/10.1155/2022/7588303>
- Paiva, F., Cardoso, R., Hanaoka, G. y Duarte, W. (2019). Decision-making for financial trading: A fusion approach of machine learning and portfolio selection. *Expert Syst. Appl.*, 115, 635-655. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.08.003>
- Rodríguez-Marín, L. V. (2018). *Selección de una cartera de acciones del índice colcap en el corto plazo; mediante la evaluación del modelo de media- varianza, el modelo graham y un fondo bursátil de inversión* [Universidad Católica de pereira]. <https://catalogo.ucp.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=561413>

- Saranya, K. y Prasanna, P. K. (2014). Portfolio Selection and Optimization with Higher Moments: Evidence from the Indian Stock Market. *Asia-Pacific Financial Markets*, 21(2), 133-149. <https://doi.org/10.1007/s10690-014-9180-0>
- Syahla, R., Susanti, D. y Napitupulu, H. (2024). Optimization of Investment Portfolio Mean-Variance Model Using Genetic Algorithm. *International Journal of Business, Economics, and Social Development*. <https://doi.org/10.46336/ijbesd.v5i2.654>
- Wang, Q. (2023). Optimizing Stock Portfolio using Markowitz Model. *BCP Business & Management*. <https://doi.org/10.54691/bcpbm.v44i.4926>
- Yao, L. (2023). Application of the markowitz model and indexmodel in real stock markets. *Finance & Economics*. <https://doi.org/10.61173/ypyp5r05>
- Yilin, Han, R. y Wang, W. (2021). Portfolio optimization with return prediction using deep learning and machine learning. *Expert Syst. Appl.*, 165, 113973. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113973>
- Zhang, X. (2024). Application and Comparison of Index Model and Markowitz Model in American Stock Market. *Highlights in Business, Economics and Management*. <https://doi.org/10.54097/snr61486>
- Zhou, S. y Zhang, S. (2023). Portfolio Optimization Analysis in American Industry. *BCP Business & Management*. <https://doi.org/10.54691/bcpbm.v38i.4213>

Agradecimientos: La presente propuesta nace del proyecto de investigación El Mercado de Capitales como oportunidad de financiación para las Pymes en el Valle de Aburrá, en el marco de redes empresariales como factor clave para su competitividad.

AUTOR/ES:

Claudia María García Mazo

Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Colombia.

cgarcia@elpoli.edu.co

Índice H: 5

Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0002-1011-9596>

Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57210747615>

Google Scholar: <https://scholar.google.com/citations?user=yO-ixpQAAAAJ&hl=es>

ResearchGate: <https://acortar.link/eC9JUw>