European Public & Social Innovation Review

ISSN 2529-9824

Artículo de Investigación

Explorando el cambio en el discurso matemático del profesor mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje

Exploring change in teacher mathematical discourse using a hypothetical learning trajectory

Martha Leticia García Rodríguez: Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, México.
mlgarcia@ipn.mx
Juan Gabriel Herrera Alva[1]: Universidad Nacional Autónoma de México, México.
gabalva@ciencias.unam.mx

Fecha de Recepción: 28/05/2024

Fecha de Aceptación: 25/07/2024

Fecha de Publicación: 12/09/2024

Cómo citar el artículo:

García-Rodríguez, M. y Herrera-Alva, J. (2024). Explorando el cambio en el discurso matemático del profesor mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje [Exploring change in teacher mathematical discourse using a hypothetical learning trajectory]. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1-19. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-759

Resumen:
Introducción: El objetivo de este trabajo es identificar características del discurso matemático en el aula después del diseño y durante la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) de un profesor. **Metodología:** Para el análisis de datos, se utilizó un método de triangulación de la información que incluyó análisis de transcripciones de videos, reportes de observaciones realizadas por los investigadores, cuestionarios, entrevistas y diseño de la THA. Las interacciones entre el profesor y los estudiantes fueron codificadas de acuerdo con el flujo de comunicación profesor-estudiante; profesor-clase. **Resultados:** De la clase uno a la clase dos se identificó un cambio en el flujo de información vertical, de individual a grupal, y un mejor equilibrio entre el andamiaje analítico y social. **Discusión:** El diseño de la THA favoreció la reflexión del profesor, quién expresó características de su clase, lo que coincide con los propósitos del diseño de una THA. **Conclusiones:** El estudio puede ser de utilidad para una autoevaluación del profesor acerca de las características y efectividad de su enseñanza, la importancia de una reflexión previa de lo que puede suceder en su clase, incluyendo las dificultades de los estudiantes, que le permita contar con elementos para responder ante estas situaciones.

[1] **Autor Correspondiente:** Juan Gabriel Herrera Alva. Universidad Nacional Autónoma de México (México).

Palabras clave: discurso matemático; andamiaje analítico; andamiaje social; trayectorias hipotéticas de aprendizaje; trayectorias reales de aprendizaje; estrategias pedagógicas; aprendizaje reflexivo; cambio en el discurso.

Abstract:
Introduction: The aim of this paper is to identify characteristics of mathematical discourse in the classroom after the design and during the implementation of a teacher's hypothetical learning trajectory (HLT). **Methodology:** For the data analysis, a method of data triangulation was used that included analysis of video transcripts, reports of observations made by the researchers, questionnaires, interviews and the design of the HLT. Teacher-student interactions were coded according to teacher-student communication flow; teacher-class. **Results:** From class one to class two a shift in vertical information flow from individual to group and a better balance between analytical and social scaffolding was identified. **Discussion:** The design of the HLT favored the teacher's reflection, who expressed characteristics of his class, which coincides with the purposes of the design of an HLT. **Conclusions:** The study can be useful for the teacher's self-assessment of the characteristics and effectiveness of his teaching, the importance of prior reflection on what can happen in the classroom, including the difficulties of the students, which will allow him to have elements to respond to these situations.

Keywords: mathematical discourse; analytical scaffolding; social scaffolding; hypothetical learning trajectories; actual learning trajectories; pedagogical strategies; reflective learning; discourse change.

1. Introducción

En las reformas curriculares iniciadas a finales del siglo pasado se recomienda a los profesores crear ambientes de aprendizaje que estimulen el desarrollo intelectual en los estudiantes: esto incluye la exploración y comprensión de ideas y conceptos en matemáticas y su conexión con otras disciplinas (Fennema y Franke, 1992). Para lograr lo anterior, autores como Silver y Smith (1996) consideran que el discurso que se genera en el aula sienta las bases de una comunicación entre estudiantes y de éstos con el profesor, en la que es posible promover conocimiento matemático.

Para autores como Slavin (1996) y Tabach y Schwarz (2018) la comunicación entre estudiantes es un factor clave en el aula, pues el discurso que se genera a través de esta tiene relación con el tipo de aprendizaje y pensamiento que promueve.

De acuerdo con Campbell (2021) el discurso incluye las acciones normativas, creencias y el uso del lenguaje dentro de una comunidad particular. Los sujetos que se dedican a una misma actividad utilizan palabras específicas que son comunes para todos los miembros de ese grupo. Campbell realizó una revisión sistemática de investigaciones relacionadas con el análisis del discurso en trabajos grupales en el aula, identificó seis categorías que representan el foco de investigación de los artículos seleccionados. Una de estas categorías es la de coordinación de grupo, en ella el foco de investigación está en la coordinación de la conversación o desarrollo de puntos en común, menciona que en esta categoría se identifica la construcción de un terreno común que exige una atención continua a las ideas en curso y durante ella la comprensión parcial de los participantes.

En esta categoría Sfard y Kieran (2001) realizaron un análisis focal para contar con una imagen detallada del discurso matemático y poder evaluar su efectividad. También, realizaron un análisis de meta-mansajes y examinaron la colaboración de los participantes en la conversación. Las autoras reportan acerca del potencial didáctico de las matemáticas habladas, y señalan que, para que una conversación sea eficaz y propicia para el aprendizaje, se debe enseñar el arte de comunicar: ser preciso en el foco pronunciado y explícito en el foco atendido. La categoría coordinación de grupo está relacionada estrechamente con el papel del profesor en el aula, Demirci y Baki (2023) afirman que el discurso entre estudiantes y entre profesor y estudiante depende de las preguntas formuladas en el aula y de las respuestas, y se refieren a un discurso matemático rico y significativo como aquel discurso interactivo y sostenido entre profesores y estudiantes.

El trabajo de Nathan y Knuth (2003) brinda herramientas metodológicas para analizar el discurso matemático en el aula. Distingue entre dos tipos de andamiaje que realiza un profesor, el analítico orientado a apoyar el aprendizaje de las matemáticas y el social que se refiere a las normas para la convivencia y tiene como objetivo facilitar la participación de los estudiantes en las interacciones en el aula. Según estos autores, los cambios en las prácticas docentes hacia enfoques más orientados al discurso en el aula implican cambios en el discurso matemático, lo cual puede hacer del aula un espacio más colaborativo y centrado en la participación activa de los estudiantes. En este sentido, anticiparse a lo que posiblemente ocurrirá en el aula, puede ser la clave para lograr un discurso con estas características.

Por otro lado, Simón (1995) propuso un constructo teórico que denominó trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), este constructo aborda el desarrollo sistemático de secuencias de instrucción basadas en teorías constructivistas. Contempla en su diseño: los propósitos u objetivos para el aprendizaje de los estudiantes; los entornos y las actividades matemáticas que se utilizarán para promover el aprendizaje de los estudiantes. También considera hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Simón y Tzur (2004), incorporaron en las THAs un mecanismo de reflexión actividad-efecto con el propósito de explicar el desarrollo del concepto matemático que se pretende enseñar, proporcionando así un marco para que el profesor reflexione sobre el proceso de aprendizaje hipotético y el diseño o la selección de tareas matemáticas.

La investigación que aquí se reporta se orienta a identificar si el diseño de una THA incide en el discurso que promueve el profesor a partir de su implementación en el aula. El objetivo es identificar los cambios en el lenguaje cotidiano y el lenguaje técnico del profesor, y en posibles modificaciones de las estrategias comunicativas en su enseñanza; otro objetivo es identificar, durante la implementación de una THA, elementos explícitos en el discurso del profesor en el aula que se tuvieron en cuenta en su diseño. La pregunta guía es: ¿qué características tiene el discurso matemático de un profesor después del diseño y durante la implementación de una THA?

1.1. Elementos teóricos

Para llevar a cabo el análisis del discurso matemático en el aula se retoman elementos del trabajo de Nathan y Knuth (2003), el cual brinda una propuesta sobre el análisis del flujo de información que se genera en el aula, a saber, flujo vertical (profesor-estudiante y profesor-clase) y flujo horizontal (estudiante-estudiante). Los autores clasifican estos flujos en andamiaje analítico, el cual se refiere al soporte de las ideas matemáticas durante las interacciones en clase; y andamiaje social, el cual se ocupa de facilitar las normas de comportamiento social y las expectativas respecto al discurso en clase. Según los autores, es esencial mantener un balance entre ambos tipos de andamiaje para lograr prácticas instruccionales efectivas, esto implica apoyar tanto el contenido matemático como la participación activa y las normas sociales de los estudiantes en el entorno de aprendizaje.

Hay autores que establecen una relación entre un sistema de apoyo que provea materiales y estrategias pedagógicas y la generación de una visión más rica y compleja de las matemáticas que desafíe las concepciones tradicionales en los docentes y conduzca a un aprendizaje más profundo y reflexivo en los estudiantes, por ejemplo, los trabajos de Schifter y Simon (1992) y Raymond (1997). En particular las THAs podrían ser un sistema de apoyo para lograr que se genere un cambio en el discurso matemático que se produce en el aula. De manera que, otro constructo teórico utilizado en esta investigación es precisamente el de THA que está sustentado en un análisis previo del profesor acerca del mecanismo de reflexión sobre la actividad y efectos en el estudiante (Simon y Tzur, 2004). Es decir, anticipar las acciones, los objetivos y las metas que el estudiante se traza para realizar una tarea matemática propuesta por el profesor; y su efecto, que se refiere, al resultado observable o aprendido por el estudiante (el estudiante registra cada intento sobre la actividad, lo que le permite identificar patrones y nuevas relaciones de actividad-efecto). Este mecanismo de reflexión actividad-efecto es un proceso de la abstracción reflexiva desarrollado por Piaget (Piaget, 2001, como se citó en Simon y Tzur, 2004), y puede ser llevado a cabo de manera consciente o inconsciente por el estudiante. Una vez definido un objetivo de aprendizaje, el profesor parte del conocimiento previo del estudiante, planifica, a partir de su experiencia docente, las tareas matemáticas que va a proponer para lograr el objetivo y anticipa los potenciales caminos que el estudiante puede seguir. Esto conforma un primer ciclo de diseño de la THA que conduce, una vez que se implementa la tarea y se analizan los resultados, a un rediseño para mejorarla. Se destaca que las THAs son un marco para pensar y explicar cómo una tarea puede promover el proceso de aprendizaje, es decir, son un marco para reflexionar sobre el proceso de aprendizaje hipotético, el diseño de tareas y su rediseño para mejorar los resultados obtenidos. Por otro lado, Leikin y Dinur (2003) introdujeron el concepto de trayectoria real de aprendizaje (TRA). Estas se refieren a los eventos, procedimientos o rutas de aprendizaje que parecieron haber seguido los estudiantes en la implementación de una secuencia instruccional en el aula.

Según Stylianides y Stylianides (2009), lograr alcanzar un emparejamiento entre una THA y su respectiva TRA en el contexto de una secuencia instruccional particular, ofrecería evidencia del logro o realización de los objetivos de aprendizaje de una secuencia de instrucción.

2. Metodología

La investigación que se reporta se ubica en una perspectiva cualitativa, mediante el método de estudio de caso, en ella participó un profesor del Uruguay que denominaremos M que imparte una clase de matemáticas en el nivel educativo de bachillerato y otra en el nivel básico. El profesor M fue seleccionado de un grupo de cinco profesores que se encontraban inscritos en una asignatura que forma parte de un programa de formación. En ella trabajaron en el tema de análisis del discurso matemático en el aula y en el diseño de una THA. Los profesores fueron convocados para participar en la investigación, el profesor M manifestó su disposición e interés para participar además de que confirmó que contaba con las facilidades y autorización de los directivos de los planteles educativos donde labora y de los estudiantes para videograbar las clases y analizar su contenido.

La participación del profesor se dividió en tres etapas:

i) En la primera se le solicitó que realizara la grabación aproximadamente de 20 minutos de un tema de una clase que él eligiera, se le brindaron especificaciones básicas para la calidad de la grabación (audio y video). El propósito de esta actividad fue identificar características del discurso matemático en el aula del profesor.
ii) En la segunda etapa se le solicitó que diseñara una THA eligiendo algún concepto (y sólo uno) de alguna materia que imparte. Se le indicaron los elementos que debería integrar en su THA, a saber, el objetivo de aprendizaje, las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje, considerando una sesión de aproximadamente 20 minutos. Se le compartió una matriz del proceso de aprendizaje hipotético para que la tomara como guía.
iii) En la tercera etapa, se le requirió implementar la THA en una clase y su respectiva grabación. Nuevamente se le brindaron especificaciones para cuidar la calidad de la grabación (audio y video).

2.1. Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos para la recolección de datos que se tomaron en cuenta para el análisis fueron:

- Archivos digitales de las grabaciones de las clases.
- Notas realizadas por los investigadores acerca de los videos.
- Cuestionario de opinión para conocer sobre la experiencia del profesor sobre el diseño e implementación de la THA.
- Correos electrónicos para el acompañamiento y retroalimentación al profesor durante el diseño de la THA.

2.2. Análisis de datos

Para el análisis de datos, se utilizó un método de triangulación de la información que incluyó el análisis de transcripciones de videos, reportes de observaciones realizadas por los investigadores, cuestionarios y entrevistas, como se describe a continuación:

Los videos entregados por el profesor M fueron procesados mediante el software Turboscribe.ai desarrollado por Whisper (2024) para su transcripción.

Una vez obtenidas las transcripciones, se clasificaron las interacciones entre el profesor y los estudiantes. El criterio fue identificar quien inició la comunicación, y con esto se determinó la dirección de esta: profesor-estudiante (TS); profesor se dirige a la clase (TC); estudiante-profesor (ST); estudiante-estudiante (SS). Una vez realizado lo anterior, se localizaron las interacciones correspondientes a los andamiajes analíticos y sociales, es importante aclarar que en este trabajo el foco se ubicó en las interacciones TS y TC correspondientes al andamiaje analítico. Estas fueron codificadas de acuerdo con la propuesta de Nathan y Knuth (2003) como se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1.

Tabla de codificación de andamiaje analítico

Código	Descripción	Andamiaje
TS/qm	Pregunta matemática	A
TS/rm	Respuesta a una pregunta o comentario matemático	A
TS/x	Otros	A y S
TC/om	Invitación abierta, pregunta matemática o desafío	A
TC/dm	Declaración de un principio, hecho o regla matemática	A
TC/x	Otros	A y S

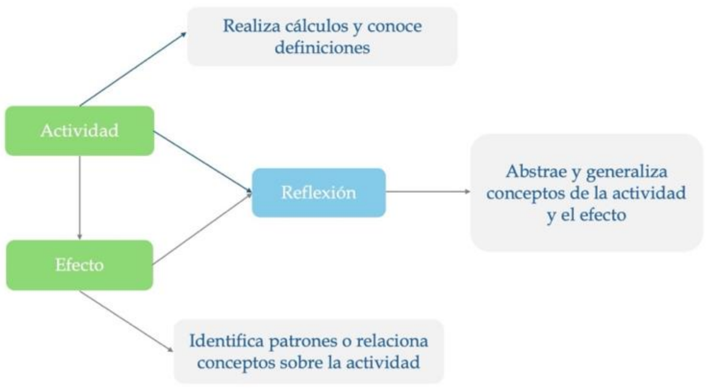
Fuente: Adaptado de "A Study of Whole Classroom Mathematical Discourse and Teacher Change", por M. Nathan y E. Knuth, 2003, *Cognition and Instruction*, *21*(2), p. 184. Copyright 2003 por Lawrence Erlbaum Associates, Inc. En donde (A) representa el andamiaje analítico y (S) el andamiaje social.

Así mismo, se diseñaron esquemas de momentos discursivos que describen el prototipo y desarrollo de las estrategias comunicativas utilizadas en la clase uno y en la clase dos del profesor con el propósito de analizar, por ejemplo, las categorías de las preguntas que realizó antes y después de la implementación de la THA y las modificaciones en el lenguaje matemático.

Por otra parte, se revisaron los documentos que dan testimonio de la elaboración de la THA, y, si bien no es el objetivo determinar su efectividad (emparejamiento con la TRA), sí necesitamos elementos que nos den evidencia de cómo se desarrolló el mecanismo de reflexión actividad-efecto durante su implementación en el aula. Por ello, diseñamos una matriz que integra tres apartados para la recolección de evidencias en las transcripciones de video: uno para las evidencias identificadas sobre la actividad, otro para las evidencias sobre el efecto y un tercero para la reflexión. Los criterios sobre las características que la evidencia debe cumplir en cada rubro del mecanismo de reflexión actividad-efecto se muestra en la Figura 1.

Figura 1.

Características de la actividad, el efecto, la reflexión y su relación



Fuente: Mecanismo de reflexión actividad-efecto y sus características. Elaboración propia (2024).

Por otra parte, también se analizó qué elementos explícitos presentes en el diseño de la THA fueron identificados en el discurso matemático del aula. Así mismo, se realizaron entrevistas semiestructuradas con el profesor para ahondar en el análisis de su práctica docente.

3. Resultados

El análisis de datos se presenta de acuerdo con las tres etapas descritas en la sección de metodología.

3.1. Etapa 1. Clase uno (esquemas de momentos discursivos que describen el desarrollo de la clase uno)

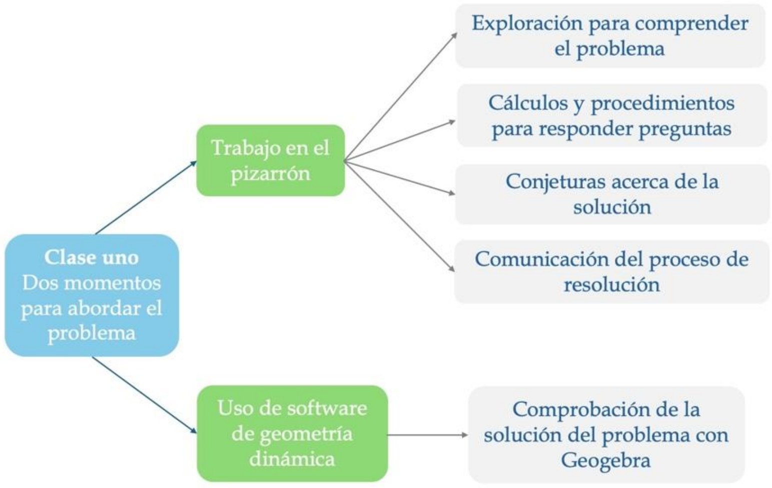
En esta etapa el profesor compartió un video de 20 minutos de duración. Propuso al grupo un problema clásico de geometría analítica en el que solicitaba determinar el intervalo del parámetro m para el cual una familia de rectas corta en dos puntos a una circunferencia fija.

El análisis del discurso de la clase se dividió en dos secciones. En la primera, se trabajó en el pizarrón. Las estrategias comunicativas empleadas durante el desarrollo y solución del problema fueron identificadas a partir del análisis de las transcripciones del video de la clase del profesor. Estas estrategias incluyeron: la exploración para comprender el problema, se compartieron conjeturas acerca de la solución, se realizaron cálculos y procedimientos para responder preguntas, y se compartieron procedimientos. Es relevante mencionar que algunos de estos momentos discursivos se repitieron en más de una ocasión. En la segunda sección, los estudiantes verificaron la solución del problema mediante el uso de un sistema de geometría dinámica supervisados por el profesor.

La Figura 2 muestra las características generales identificadas en el discurso de la clase uno del profesor.

Figura 2.

Esquema de estrategias comunicativas identificadas en el desarrollo de la clase uno



Fuente: Se identificaron cinco estrategias comunicativas en diferentes momentos discursivos de la clase uno. Elaboración propia (2024).

Durante el trabajo en el pizarrón el profesor planteó a los estudiantes preguntas dirigidas para que centraran su atención en la recta y que reconocieran que esta cambiaba de posición (exploración para comprender el problema, líneas 1, 2, 6 y 7). En esta sección se identificó una interacción TC y predominó una invitación abierta, pregunta matemática o desafío (TC/om).

1. Profesor (TC/om): Tengo una circunferencia que es $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ y una recta que es $3x-4y-m=0$. El tema es en la recta esa, ¿sí? ¿Es una recta fija?
2. Estudiante: No.
6. Profesor (TC/om): ¿Cómo se mueve esa recta?
7. Estudiante: En el eje y.

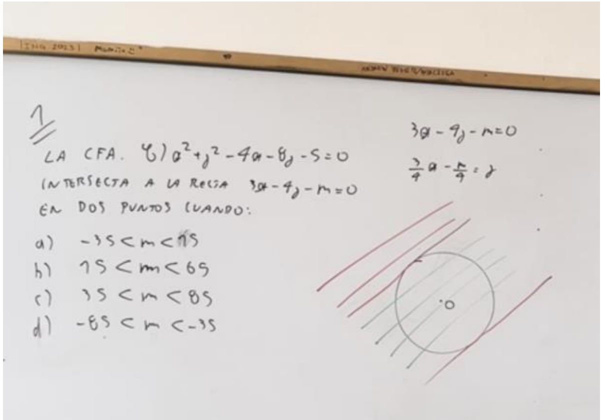
El profesor solicitó a los estudiantes el valor de la pendiente de la recta que se mueve (cálculos y procedimientos para responder preguntas, líneas 9-14). En este pasaje el profesor tuvo una interacción (TC/ om), sin embargo, predominó una interacción de tipo (TS/qm).

9. Profesor (TC/om): ¿Cómo hacen para saber la pendiente?
10. Estudiante: es el término que multiplica a la x cuando está igualado.
11. Profesor (TS/qm): Ah, ¿tiene que llevarla a forma?
12. Estudiante: A la forma […] ¿explícita?
13. Profesor (TS/qm): ¡Explícita! Dale, ¿cómo queda explícita?
14. Estudiante: ¾ $x-m/4=y$.

Los cálculos realizados condujeron a los estudiantes a explorar nuevamente el problema a partir de un dibujo que el profesor realizó en el pizarrón (Figura 3).

Figura 3.

Circunferencia y familia de rectas de la tarea matemática de la clase uno



Fuente: Foto del video sobre el dibujo del profesor relativo a la tarea matemática de la clase uno (2024).

El profesor utilizó la figura para solicitar a los estudiantes una estrategia para resolver el problema, en este momento se identificó un cambio en el tipo de andamiaje que el profesor realizó, ahora formuló preguntas específicas sobre los conceptos implícitos en la solución del problema; y se dirigió a un estudiante en particular (conjeturas acerca de la solución, líneas 17-23). Esto se ubicó como un andamiaje analítico orientado a contenidos matemáticos (TC/om) y (TS/qm).

17. Profesor (TC/om): Sí, yo quiero los m, para que la recta corte a la circunferencia en dos puntos. ¿Va? ¿Qué les parece hacer? ¿Ideas, sugerencias?
18. Estudiante: Yo lo que hice fue usar la ecuación del punto a la recta.
19. Profesor (TS/qm): ¿Distancia del punto a la recta?
20. Estudiante: Me dio una inecuación.
21. Profesor (TS/qm): ¿De qué punto?
22. Estudiante: Del punto al centro de la circunferencia. Y la distancia igualada sería el radio.
23. Profesor (TS/rm): Vale, vamos a probarlo.

De la respuesta del estudiante se identificó el proceso para llegar a la solución del problema. Otro estudiante a solicitud del profesor pasó al pizarrón a desarrollar los procedimientos necesarios para llegar a la respuesta solicitada, el andamiaje analítico realizado por el profesor nuevamente se orientó a los contenidos matemáticos (TS/qm). En la última parte de esta sección el andamiaje analítico orientado a los contenidos matemáticos se mantuvo hasta llegar a la solución del problema y la dirección de la interacción fue profesor-estudiante (comunicación del proceso de solución, líneas 27-28).

27. Profesor (TS/qm y x): Bueno, plantéelo, ¿vale? Que quede lindo, de aquel lado.
28. Estudiante: Primero lo que hice fue agarrar esa ecuación y no lo hice con lo que aprendimos recién del A, B, C, sino que simplemente lo pensé como el binomio al cuadrado. Y me quedó así […].

En la segunda sección de la clase se utilizó el sistema de geometría dinámica (comprobación de la solución del problema con Geogebra, líneas 44-47). El andamiaje del profesor se caracterizó por dirigirse a la clase y combinar preguntas o instrucciones con contenido matemático y explicación sobre el uso del sistema de geometría dinámica (TC/x).

44. Profesor (TC/x): ¿Se va a comprobar o no? […] Pero… Sí, esa es la respuesta correcta. ¿Va? ¿Está bueno eso? Me gustó cómo lo planteaste así.
45. Estudiante: ¿Puedo ir?
46. Profesor (TC/x): ¿Sí? Ah, ¿la computadora? Sí. Dale, ¿lo pueden comprobar en Geogebra? Sí. ¿Sí lo van a comprobar o no? […]
47. Profesor (TC/x): ¿Qué hay ahí? Pónganle un deslizador. Póngale m o a, lo que ustedes quieran.

3.2. Etapa 2. Descripción del diseño de la THA

El profesor entregó un documento en Word con el diseño de su THA en el que incluyó:

- **Objetivo de aprendizaje:** diferenciar el numerador del denominador [en una fracción] y fortalecer la comprensión numérica [equivalencia de fracciones].

- **La tarea matemática:** la tarea consistió en que, a partir de un segmento de 60 cm de longitud, hallar qué fracción representa (a) la mitad de la mitad; (b) la mitad de la tercera parte; (c) la tercera parte de la mitad; y (d) la mitad de la cuarta parte.

- **El proceso hipotético:** consideró los siguientes elementos de acuerdo con el mecanismo de reflexión actividad-efecto. En relación con la actividad, anticipó que sus estudiantes marcarían (doblando la regla de papel) o iluminarían la mitad de la regla de papel (0 al 30) con algún color específico. Después con otro color iluminarían otro tramo del 0 al 15 dentro del tramo ya pintado. De esta manera compararían y representarían el segmento pedido en el inciso (a) de la tarea. Para el inciso (b), los estudiantes dividirían la regla total en 3 partes iguales coloreando el primer pedazo y a su vez coloreando la mitad de este. De manera similar, seguirían esta estrategia para responder los incisos restantes.

  Respecto al efecto el profesor conjeturó que, mediante el transcurso de colorear la parte correspondiente de la regla (la mitad de la mitad, la mitad de la tercera parte, etc.), el estudiante lograría diferenciar entre el numerador y el denominador fortaleciendo el concepto matemático de fracción. También, que identificaría fracciones equivalentes (1/4 y 15/60 o 1/6 y 10/60, etc.), fomentando así su comprensión numérica.

  En cuanto a la reflexión, el profesor anticipó que, el estudiante reflexionaría, que la mitad de la mitad representa una cuarta parte de la longitud total de un segmento, sin importar su tamaño o longitud original; de manera similar, la mitad de la tercera parte representa una sexta parte de la longitud total, etc. Comprendería el significado de una fracción como parte-todo. Posiblemente, reflexionaría sobre errores cometidos al interpretar la relación entre numerador y denominador.

3.3. Etapa 3. Clase dos (Implementación de la THA)

El profesor compartió un video de 17 minutos de duración. Por motivos de espacio, se reporta sólo la implementación de la THA del inciso (a) de la tarea matemática. Se presentan algunos pasajes del discurso (interacciones del profesor) que llevó a cabo en el aula en donde se identificaron características de su discurso y elementos explícitos propios de la THA.

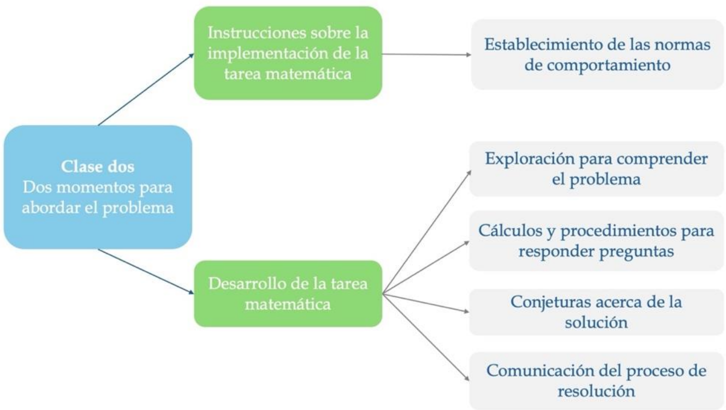
3.3.1. Esquemas de momentos discursivos que describen el desarrollo de la clase dos

Cada estudiante recibió cuatro reglas de papel de 60 cm. El profesor brindó instrucciones a los estudiantes acerca del uso de las reglas de papel para realizar la tarea matemática, y les leyó la primera consigna de la tarea.

Al inicio, el discurso del profesor en el aula se caracterizó por un andamiaje puramente social, en donde expuso al grupo las instrucciones de la tarea. Después, se identificaron las mismas estrategias comunicativas que en la clase uno, excepto el momento discursivo atribuido al uso de tecnología digital. Específicamente, se identificaron: la exploración para comprender el problema, pero a diferencia de la clase uno, la exploración se realizó a través de una narración de la tarea matemática sin auxiliarse del pizarrón; los estudiantes realizaron cálculos y procedimientos para responder preguntas; el profesor provocó que los estudiantes reflexionaran en la validez o falsedad de algunas conjeturas sobre la equivalencia de fracciones; los estudiantes compartieron procedimientos. Al igual que en la clase uno, estos momentos discursivos se repitieron en más de una ocasión. La Figura 4 muestra las características generales identificadas en el discurso de la clase dos.

Figura 4.

Esquema de las estrategias comunicativas identificadas en el desarrollo de la clase dos



Fuente: Se identificaron cinco estrategias comunicativas en el discurso de la clase dos. Elaboración propia (2024).

Se presentan algunos pasajes del discurso que se llevó a cabo en el aula. En la primera fase se identificó un andamiaje puramente social, en donde el profesor facilitó las normas de comportamiento social y las instrucciones para desarrollar la tarea matemática (líneas 5, 8-11).

5. Profesor: Bien, escuchen, voy a repartir una hoja de actividades. Vayan pasando acá, vayan pasando, sí. Para hacer la actividad uno, les voy a dar otra cosita más, para completar. Pasen para atrás.
8. Profesor: La idea es, que escuchen, no apurarse en hacer las actividades, ¿sí? No tiene sentido que se apuren, la idea es que yo les diga algo que sirva […]. Pero antes de empezar la actividad uno, voy a repartir estas reglas de papel.
9. Estudiante: ¿Reglas de papel?
10. Profesor: Sí, la regla de papel.
11. Estudiante: ¿Por qué regla de papel?

En la segunda fase, el profesor planteó a los estudiantes preguntas dirigidas para que centraran su atención en el uso de la regla y el concepto de fracción (exploración del problema, líneas 21-24). Con esto se identificó una interacción TC y predominó una invitación abierta, pregunta matemática o desafío (TC/om).

21. Profesor (TC/om): ¿Qué fracción de la unidad representa? (a) la mitad de la mitad, … No digas nada. La mitad de la mitad; (b) la mitad de la tercera parte […]
22. Profesor (TC/x): Ustedes pueden usar esto que está acá. La reglita de papel para calcular. ¿Lo vieron?
23. Estudiante: Sí.
24. Profesor (TC/x): Y la idea es que contesten ahí qué fracción representa la parte (a), la parte (b), la parte (c) y la parte (d). ¿Alguna duda de esto?

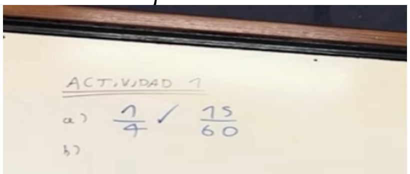
El profesor solicitó a los estudiantes representar mediante una fracción la mitad de la mitad de un segmento de 60 cm (cálculos y procedimientos para responder preguntas, líneas 71-73, 85 y 95). Aquí se identifica un andamiaje analítico (TC/om y x).

71. Profesor (TC/om): ¿En la parte (a), ¿qué fracción me representa la mitad de la mitad?
72. Estudiante: 15 sobre 30.
73. Profesor (TC/x): ¿15 sobre 30?
85. Estudiante: ¿Un cuarto?
95. Estudiante: 15 sobre 60.

El profesor cuestionó la solución mediante una pregunta cerrada (conjetura acerca de la solución, líneas 96-99) predominando un andamiaje de tipo (TC/ om). La Figura 5 ilustra el momento de ese cuestionamiento.

Figura 5.

Fracciones equivalentes en la actividad uno de la tarea matemática desarrollada en clase



Fuente: Foto del video de la primera actividad de la tarea matemática de la clase dos (2024).

96. Profesor (TC/om): ¿Un cuarto? ¿15 sobre 60? ¿Es lo mismo?
97. Estudiante: Es lo mismo, pero…
98. Profesor (TC/om): ¿es equivalente?
99. Estudiante: Es igual.

Destaca un pasaje donde se compartió un procedimiento para responder a una pregunta sobre la equivalencia de fracciones (comunicación del procedimiento de solución, líneas 100-104) con interacciones (TC/ om y x) y (TS/ x).

100. Profesor (TC/om): ¿qué significa que sea equivalente con fracciones?
101. Estudiante: Que valen lo mismo. O sea que si yo corto una pizza en 4 partes y tomo una sola es un cuarto. Si la corto en 60 partes y tomo quince me queda lo mismo.
102. Profesor (TS/x): ¿La misma pizza?
103. Estudiante: Sí, la misma pizza.
104. Profesor (TC/x): ¿Están de acuerdo?

Las interacciones identificadas durante cada clase del profesor M fueron clasificadas en función de los actores que participaron en ellas. El análisis presentado se enfocó en el andamiaje analítico con la finalidad de caracterizarlo de manera más precisa, se distinguen dos tipos de interacciones, TC y TS. La Tabla 2 muestra el concentrado de estrategias comunicativas identificadas y el discurso matemático que prevaleció en ellas.

Tabla 2.

Estrategias comunicativas y cambio en el discurso analítico en el aula

Estrategias comunicativas	**Discurso analítico en la clase uno**	**Discurso analítico en la clase dos**
Exploración del problema	TC/om	TC/om
Socialización de conjeturas	TS/qm	TC/om y x
Cálculos y procedimientos	TC/om y TS/qm	TC/ om
Socialización de procedimientos	TS/qm	TC/ om y x y TS/ x
Uso de tecnología digital	TC/ om y x	–

Fuente: Elaboración propia (2024).

3.3.2 Cambios en el flujo de información vertical y andamiajes analítico y social en el discurso del profesor

El andamiaje analítico realizado por el profesor en el primer video es diferente cuando se dirige a toda la clase que cuando se dirige a un estudiante. En el primer caso, predominan las preguntas generales ¿cómo se mueve esa recta?, y en el segundo, predominan las preguntas específicas ¿son paralelas?

Respecto al andamiaje social, este se calculó mediante el número total de interacciones que no fueron identificadas como andamiaje analítico puro, es decir, interacciones del tipo (TS/qm o rm) y (TC/om o dm), sin hacer una caracterización más fina de este tipo de andamiaje.

En el segundo video el profesor destina un espacio mayor de andamiaje social que no se identificó en el primer video. Se destacan 10 interacciones sociales antes del inicio del trabajo con la THA.

Los resultados obtenidos indican que el flujo de información vertical individual disminuyó de 108 interacciones en la clase uno a 39 en la clase dos; mientras que el flujo de información vertical grupal aumentó de 75 interacciones en la clase uno a 116 en la clase dos. La proporción entre andamiaje analítico (individual y grupal) y social (individual y grupal) de la clase uno a la clase dos se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3.

Tabla comparativa del porcentaje entre el flujo de andamiajes analítico y social (individual y grupal) de la clase uno y la clase dos

Flujo vertical	**Clase uno**		**Clase dos**	
	% Analítico	**% Social**	**% Analítico**	**% Social**
Individual	42,62	16,39	14,83	10,32
Grupal	32,24	8,74	37,41	37,43
Total	**74,86**	**25,13**	**52,24**	**47,75**

Fuente: Elaboración propia (2024).

De la clase uno a la clase dos se identifica un cambio en el flujo de información vertical de individual (profesor-estudiante) a grupal (profesor-grupo). También se evidencia una reducción en el andamiaje analítico al pasar de la clase uno a la clase dos, y un incremento en la proporción de un andamiaje social de la clase uno a la clase dos.

3.3.3. Mecanismo de reflexión actividad-efecto y elementos de la THA que se identificaron en el discurso del profesor en el aula

El profesor no expuso los objetivos de aprendizaje de la tarea matemática marcados en la THA, simplemente dijo que trabajarían fracciones. Expuso en qué consistía la tarea leyendo cada uno de sus incisos de acuerdo con la THA. Sobre el proceso hipotético de aprendizaje, el desempeño de los estudiantes respecto a su actividad fue el estimado en la THA, en el siguiente diálogo se evidencia el uso del material didáctico para resolver la tarea, y el conocimiento sobre el concepto de fracción (realizaron cálculos y manejaron la definición de fracción distinguiendo entre numerador y denominador, líneas 30, 32, y 52, 53 y 66-70).

30. Profesor (TC/om): Usando la regla, […] ¿Qué fracción sería la mitad de la mitad? La mitad de la mitad de esto […] ¿Qué fracción representa? Puedes utilizar la regla como quieras.
32. Profesor (TC/x): Capaz que la regla nos ayuda, no sé. […]
52. Profesor (TC/om): ¿Qué fracción? Les estoy pidiendo una fracción. Para una fracción necesito ¿cuántos números?
53. Estudiante: ¿Dos?
66. Estudiante: El de arriba es el numerador y el de abajo es el denominador.
67. Profesor (TS/x): Bien.
68. Profesor (TC/dm): ¿Cada uno significa algo diferente, ¿no?
69. Estudiante: Sí.
70. Profesor (TC/x): Entonces, ahora vamos a conversar sobre eso.

En la entrevista realizada al profesor, comentó que un estudiante coloreó la mitad de la regla de amarillo, y a su vez la mitad de esa parte la iluminó de color naranja para representar la mitad de la mitad de la longitud original de la regla. También comentó que otros estudiantes utilizaron esta técnica coloreando o doblando la regla según los segmentos requeridos. Lo anterior proporciona evidencia de que el profesor hizo explícitos elementos de la THA en su discurso en el aula sobre la actividad del estudiante.

Respecto al efecto de la actividad, en general, los estudiantes identificaron que la mitad de la mitad es 1/4 y, además, mencionaron que esto equivale a 15/60 (líneas previas 96-101).

En entrevista, la percepción del profesor sobre el efecto de la actividad en el estudiante fue que, establecieron relaciones entre diferentes objetos matemáticos, por ejemplo, reconocieron la relación entre numerador y denominador en una fracción, distinguieron que la mitad de la mitad de la longitud de 60 cm es 1/4. Esto da evidencia de que el profesor incorporó en el discurso en el aula elementos contemplados en la THA sobre el efecto.

Respecto a la reflexión del estudiante sobre su actividad-efecto, el profesor se percató de que no dirigió el discurso en el aula hacia la abstracción y generalización de este conocimiento, por lo que no se identificó evidencia de la reflexión entre la actividad y el efecto considerado en el diseño de la THA.

Así mismo, el profesor reflexionó que en el diseño de su THA no consideró atender respuestas erróneas, esta reflexión ocurrió debido a una participación equivocada de un estudiante quien afirmó que 15/30 correspondía a la mitad de la mitad de la regla de 60 cm. Sin embargo, este tipo de respuestas incorrectas fue atendido en el discurso analítico del profesor y secundado por los participantes de la clase, como se evidencia en el pasaje de las líneas 71-73, 85 y 95 comentadas previamente.

4. Discusión

Estos resultados muestran un discurso educativo más equilibrado entre los andamiajes analítico y social de la clase uno a la clase dos, pasando del 74,86% analítico y 25,13% social al 52,24% analítico y 47,75% social. De esta forma, la introducción de la THA como herramienta metodológica para el profesor modificó la estructura de la clase, más aún, el profesor generó en el aula un discurso a partir de lo que planeó en su THA, ya que se encontraron evidencias explícitas en su discurso sobre los elementos actividad-efecto que consideró en el mecanismo de reflexión actividad-efecto.

Los datos obtenidos que corresponden a los porcentajes de los andamiajes analítico y social de la clase dos, también aportan evidencia de que la THA favoreció la convivencia y la participación de los estudiantes en el aula, es decir, como mencionan Nathan y Knuth (2003) la generación de un espacio más colaborativo.

El diseño de la THA favoreció la reflexión del profesor, quién durante la entrevista expresó que su clase fue constructivista en el sentido de que no expuso el concepto de manera tradicional, esto es consistente con lo mencionado por Simon y Tzur (2004) quienes proponen este modelo con este fin. Sin embargo, el profesor también identificó la dificultad de impartir todos los temas del curso de esa manera, al respecto, Stylianides y Stylianides (2018) recomiendan identificar los problemas que son clave y persistentes para abordarlos mediante este tipo de intervenciones en el aula que son de corta duración y que integran un marco teórico explicativo como el mecanismo de reflexión actividad-efecto, que es esencial para entender y replicar el éxito de las intervenciones en diferentes contextos educativos.

Dentro de las implicaciones de este estudio, destacamos que, los resultados sugieren que este tipo de propuesta puede ser de utilidad para una autoevaluación por parte del profesor acerca de: las características y efectividad de su enseñanza, la importancia de una reflexión previa de lo que sucederá en su clase incluyendo las dificultades y errores de los estudiantes para que le permita contar con elementos eficaces y dar respuesta ante estas situaciones.

Por otra parte, la mayoría de los estudios sobre el análisis del discurso de la clase de matemáticas se orientan a identificar las características de esta, en contraste esta investigación se orienta a incorporar una metodología práctica para promover la modificación del discurso. También destacamos que este tipo de ejercicio puede generalizarse a otros profesores durante un programa de formación para orientar el tipo de discurso que se quiere lograr de acuerdo con los objetivos curriculares establecidos por cada institución.

Dentro de las limitaciones de este estudio, mencionamos que, si bien, estos cambios en el discurso educativo del profesor parecen estar relacionados con la metodología de enseñanza en la clase uno en comparación con la utilizada en la clase dos (implementación de una THA), también pueden estar influidos por la diferencia en la edad de la población y el nivel educativo, pues el profesor brindó información de dos poblaciones distintas.

Se sugiere que este tipo de investigación se replique tomando en cuenta poblaciones homogéneas en cuanto a la edad, área de trabajo y nivel educativo.

5. Conclusiones

El lenguaje cotidiano y el lenguaje técnico del profesor cambió después de la implementación de la THA, se identificó un mejor equilibrio entre los andamiajes analítico y social, lo que se evidenció con las interacciones grupales en vez de individuales, favoreciendo la convivencia y la participación de los estudiantes en el aula.

Las estrategias de comunicación identificadas en ambas clases fueron: (1) la exploración para comprender el problema, (2) la socialización de conjeturas acerca de la solución (3) cálculos y procedimientos para responder preguntas (4) socialización de procedimientos; y fueron abordadas con discursos analíticos diferentes, con excepción de la (1).

Respecto a los elementos que fueron considerados en la THA y que se identificaron en el discurso del profesor en el aula fueron los relacionados con la actividad y el efecto, pero no la abstracción y la generalización referentes a la reflexión.

Estos resultados responden a la pregunta guía de este estudio sobre las características que el discurso matemático de un profesor tuvo durante la implementación de una THA.

Los resultados contribuyen de manera significativa en el área del análisis del discurso en el aula, al proponer una nueva metodología (incorporación de una THA) para analizar y promover un cambio en el discurso matemático de un profesor orientado a generar entornos educativos más sociales y menos individualistas.

6. Referencias

Campbell. T. (2021). An examination of discourse analytic methods in the context of mathematical group work, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2021.1944681

Demirci, S. y Baki, A. (2023). Characterizing mathematical discourse according to teacher and student interactions: The core of mathematical discourse. *Journal of Pedagogical Research*, *7*(4), 144-164. DOI.org/10.33902/JPR.202321852

Fennema, E. y Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York: Macmillan.

Leikin, R. y Dinur, S. (2003). Patterns of flexibility: Teachers' behavior in mathematical discussion. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-11). University of Pisa and ERME.

Nathan, M. y Knuth, E. (2003). A Study of Whole Classroom Mathematical Discourse and Teacher Change. *Cognition and Instruction*, *21*(2), 175-207, DOI: 10.1207/S1532690XCI2102_03

Raymond, A. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 550–576.

Schifter, D. y Simon, M. (1992). Assessing teachers' development of a constructivist view of mathematics learning. *Teaching and Teacher Education,* 8, 187–198

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions, *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76, DOI: 10.1207/S15327884MCA0801_04

Silver, E. y Smith, M. (1996). Building discourse communities in mathematics classrooms: A worthwhile but challenging journey. En P.C. Elliott, (Ed.), *Yearbook: Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 20–28). Reston.

Slavin, R. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology*, *21*(1), 43–69.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26, 114-145.

Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104, DOI: 10.1207/s15327833mtl0602_2

Stylianides, A. y Stylianides, G. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning in the area of proof. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective (pp. 99-113). Springer.

Stylianides, G. y Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40, 314–352.

Tabach, M. y Schwarz, B. (2018). Professional development of mathematics teachers towards the facilitation of small-group collaboration. *Educational Studies in Mathematics, 97*(3), 273–298.

Whisper (2024). Turboscribe.ai. [software]. https://turboscribe.ai/es/

CONTRIBUCIONES DE AUTORES/AS, FINANCIACIÓN Y AGRADECIMIENTOS

Conceptualización: García-Rodríguez, Martha Leticia (líder del proyecto) y Herrera-Alva, Juan Gabriel (autor correspondiente); **Análisis formal:** García-Rodríguez, Martha Leticia y Herrera-Alva, Juan Gabriel**; Redacción-Preparación del borrador original:** García-Rodríguez, Martha Leticia y Herrera-Alva, Juan Gabriel; **Redacción-Revisión y Edición:** García-Rodríguez, Martha Leticia y Herrera-Alva, Juan Gabriel; **Supervisión:** García-Rodríguez, Martha Leticia; **Todos los/as autores/as han leído y aceptado la versión publicada del manuscrito:** García-Rodríguez, Martha Leticia y Herrera-Alva, Juan Gabriel.

Financiación: Esta investigación se realizó con financiamiento del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y el Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCyT), México.

Agradecimientos: El presente texto nace en el marco de los proyectos con registro número 20240074 en el IPN y de Estancias Posdoctorales por México del Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCyT), México.

AUTOR/ES:

Martha Leticia García Rodríguez:
National Polytechnic Institute.

Doctorado en Ciencias en el área de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV). Profesora investigadora del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. Actualmente es coordinadora de los programas de maestría y doctorado en Matemática Educativa en el mismo Centro. Ha participado como conferencista en Foros, Congresos, Simposios y Talleres, y como autora en artículos de investigación y capítulos de libros. Ha dirigido proyectos de investigación relacionados con el uso de tecnologías digitales. Áreas de interés: razonamiento matemático de los estudiantes durante la resolución de problemas, así como el razonamiento matemático en ambientes virtuales, que es su línea actual de investigación.
mlgarcia@ipn.mx

Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-2435-1334

Juan Gabriel Herrera Alva:
National Autonomous University of Mexico.

Doctorado en Ciencias en el área de Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV). Actualmente, se encuentra realizando una estancia posdoctoral en el Instituto Politécnico Nacional/CICATA. Forma parte del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, como Profesor Titular. Ha dirigido trabajos de tesis y ha participado como ponente en congresos internacionales de prestigio en el área de la Educación Matemática: European Society for Research in Mathematics Education (CERME) and Psychology of Mathematics Education of North American (PME-NA). Cuenta con 3 publicaciones en el área del razonamiento lógico en Cálculo y Análisis.
gabalva@ciencias.unam.mx

Google Scholar: https://bit.ly/4cCPibY